NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES. [PARIS-1900]

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649776993

Notice sur les Travaux Scientifiques. [Paris-1900] by Édouard Goursat

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

ÉDOUARD GOURSAT

NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES. [PARIS-1900]

Trieste

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. ÉDOUARD GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Édouard GOURSAT.

THÉORIE DES FONCTIONS

ET FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Théorie générale des fonctions. Intégrale de Cauchy (59, 75).

1. On peut, comme l'on sait, se placer à trois points de vue différents pour étudier la théorie des fonctions analytiques; à ces trois méthodes sont attachés respectivement les noms de Cauchy, de Riemann, de Weierstrass et Méray. Le point de vue de Cauchy est généralement adopté en France dans l'enseignement, quoique le point de départ soit resté jusqu'ici un peu vague. Dans cette méthode, le théorème sur l'intégrale définie prise le long d'un contour fermé joue un rôle fondamental. Les nombreuses démonstrations proposées pour ce théorème supposaient toutes plus ou moins explicitement la continuité de la dérivée. J'avais donné moi-même en 1884 (59) une démonstration nouvelle qui paraissait exiger cette condition. Mais j'ai reconnu depuis qu'il suffit d'ajouter très peu de chose au raisonnement pour que la continuité de la dérivée n'intervienne plus (75). Cela permet de dé-

barrasser l'exposition de la méthode de Cauchy de restrictions inutiles. Pour pouvoir édifier la théorie des fonctions analytiques, en restant au point de vue de Cauchy, il suffit de supposer *la continuité de $f(z)$ et l'existence de la dérivée $f'(z)$.*

Plusieurs géomètres avaient déjà essayé vainement de reconnaître si la continuité de la dérivée était une hypothèse nécessaire ([1]).

Prolongement analytique. Espaces lacunaires (1, 46, 77, 79).

2. La notion des fonctions analytiques à espaces lacunaires, c'est-à-dire qui ne peuvent être prolongées par le procédé habituel de cheminement en dehors de certaines régions du plan, est aujourd'hui familière à tous les mathématiciens. Il y a vingt ans, on ne connaissait, en fait de fonctions possédant cette propriété singulière, que les fonctions modulaires et les fonctions plus générales que M. Schwarz avait déduites de la série hypergéométrique; ces diverses fonctions admettent pour espace lacunaire la région du plan extérieure à un cercle. Un de mes premiers Travaux avait précisément pour objet de former des fonctions analytiques, ne pouvant être prolongées en dehors d'une région du plan limitée par une courbe *de forme arbitraire*. Après avoir publié la démonstration dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ([2]), j'ai eu le regret de constater que le même théorème venait d'être publié, quelques mois auparavant, par M. Poincaré, dans un Recueil qui m'était alors complètement inconnu, les *Acta Societatis Fennicæ* (Helsingfors). Je suis revenu depuis sur le même sujet (77, 79), soit pour préciser certains points de la démonstration et répondre à des objections qui avaient été faites, soit pour examiner en détail des cas particuliers.

L'existence de fonctions à espaces lacunaires conduit à se demander s'il ne serait pas possible de généraliser la méthode du prolongement analytique, de façon à étendre le domaine naturel d'existence d'une fonction de cette espèce. Les recherches récentes de M. Borel ont

---

([1]) Osgood, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. V, n° 2, p. 84-87.
([2]) *Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 193.

donné à ce problème un très grand intérêt. En me plaçant à un point de vue indiqué par M. Picard j'ai cherché ce que donnerait l'introduction d'une nouvelle variable complexe, et j'ai montré que le problème, si l'on ne s'impose pas de conditions supplémentaires, devient complètement indéterminé (46).

Singularités des fonctions uniformes. Théorème de Mittag-Leffler (6).

3. Après avoir établi l'existence de fonctions uniformes pouvant avoir des singularités de nature quelconque, points singuliers, lignes singulières essentielles, espaces lacunaires, j'ai cherché naturellement à étendre à ces fonctions les théorèmes célèbres de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes ne possédant que des points singuliers. C'est l'emploi des développements en série donnés par M. Appell, pour les fonctions holomorphes en dehors d'un contour formé d'arcs de cercle, qui m'a fourni le moyen le plus simple d'y parvenir. Lorsque la fonction considérée ne possède qu'un nombre fini n de singularités, *elle est la somme de n fonctions dont chacune ne possède qu'une seule singularité;* c'est la généralisation de la formule de Weierstrass qui donne l'expression générale d'une fonction uniforme ayant n points singuliers.

Lorsque la fonction possède une infinité de singularités, on peut les partager en deux classes, les singularités isolées et les singularités limites, et le théorème de M. Mittag-Leffler se généralise comme il suit : 1° Étant donnée une suite de singularités isolées S_i, où l'indice i varie de 0 à $+\infty$, ayant pour limites d'autres singularités S', et une suite de fonctions $f_i(x)$, telles que $f_i(x)$ n'admette que la singularité S_i, il existe une fonction uniforme $F(x)$, n'ayant pas d'autres singularités que S_i et S', telle que la différence $F(x) - f_i(x)$ soit holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé ne renfermant pas d'autre singularité que S_i; 2° la forme la plus générale d'une fonction $F(x)$, admettant les singularités S_i et S', est $F(x) = \sum_0^{+\infty} f_i(x) + F_1(x)$, où f_i admet la seule singularité S_i en dehors des S', et où $F_1(x)$ n'admet que les singularités S'.

Coupures des fonctions représentées par des intégrales définies (7, 57, 60).

4. Au même ordre d'idées se rattachent des recherches sur les singularités des fonctions analytiques représentées par des intégrales définies, simples ou multiples. Dans un Mémoire du *Journal de Borchardt* (t. 91), M. Hermite avait démontré un théorème très important sur la différence des valeurs que prend une intégrale définie d'une certaine forme en deux points infiniment voisins, pris de part et d'autre d'une coupure. Le résultat se présentant sous forme d'un résidu, il était naturel de tenter de le rattacher au théorème de Cauchy. J'ai montré en effet que la formule de M. Hermite pouvait se déduire aisément du théorème général de Cauchy (57). Je me suis servi depuis de cette méthode pour établir les propriétés de l'intégrale normale de troisième espèce, considérée comme fonction du paramètre (103, p. 333-337), ainsi que dans l'étude d'une classe de fonctions représentées par des intégrales définies, sur lesquelles je reviendrai plus loin (n° 12).

A la fin du Mémoire que je viens de citer, M. Hermite avait envisagé des fonctions $\Phi(z)$, représentées par des intégrales doubles, qui jouissent d'une propriété singulière. La définition de la fonction $\Phi(z)$ par une intégrale double devient complètement illusoire pour une certaine région R du plan de la variable complexe z. Il y avait lieu d'examiner si cette région R ne serait pas, pour la fonction $\Phi(z)$, un espace lacunaire, résultat qui aurait eu un grand intérêt, s'il s'était trouvé exact. J'ai démontré (7, 60) qu'il n'en est rien : *la région* R *n'est pas un espace lacunaire*, au sens propre du mot. Il existe une fonction analytique de z qui coïncide avec $\Phi(z)$ à l'extérieur de R, et que l'on peut prolonger, par le procédé habituel, à l'intérieur de cette région, tant que la variable n'atteint pas certaines valeurs isolées les unes des autres. Mais, lorsque le chemin décrit par z traverse la région R, cette fonction subit des modifications profondes dont l'étude détaillée forme le principal objet d'un de mes Mémoires. J'ai déduit de cette étude le moyen de construire une intégrale double, n'ayant de sens qu'à l'intérieur de certaines portions du plan, séparées par des bandes de largeur finie, et représentant des fonctions absolument distinctes dans ces diverses régions. Les résultats curieux, obtenus d'abord par Weierstrass, puis par d'autres géomètres, avaient appelé l'attention sur les expressions analytiques, qui jouissent de cette propriété paradoxale.

Intégrales pseudo-elliptiques (11, 85).

5. Les travaux dont je vais parler maintenant sont relatifs à des catégories particulières de fonctions analytiques. Je citerai d'abord un théorème général (11), permettant de reconnaître dans certains cas qu'une intégrale elliptique est *pseudo-elliptique : Soit* $F(x)$ *une fonction doublement périodique, qui est multipliée par un facteur* ω *égal à une racine* $n^{\text{ième}}$ *de l'unité lorsque* x *augmente de la* $n^{\text{ième}}$ *partie d'une période ; l'intégrale* $\int F(x)\,dx$ *est égale à une fonction doublement périodique, augmentée d'une somme de logarithmes de fonctions doublement périodiques, multipliés par des facteurs constants.*

J'ai étudié ensuite en détail (85) le cas particulier où $n = 2$, $\omega = -1$. A toute substitution linéaire de période 2, permutant deux à deux les racines de l'équation du quatrième ordre $R(x) = 0$, le théorème précédent fait correspondre un type d'intégrales pseudo-elliptiques. Lorsqu'il existe des substitutions de période 3 ou 4, permutant les racines de $R(x)$, elles donnent lieu également à de nouvelles intégrales pseudo-elliptiques. Dans cette catégorie rentre une intégrale célèbre étudiée par Euler ([1]), Clausen, et d'autres encore. En associant les diverses substitutions précédentes, on obtient encore des types plus généraux d'intégrales pseudo-elliptiques. Quelques-unes de ces propositions ont été étudiées depuis dans un Article de M. Hermite ([2]).

Intégrales hyperelliptiques (16, 84).

6. On doit à MM. Weierstrass, Picard, Poincaré, des propositions importantes sur la réduction du nombre des périodes dans une inté-

---

([1]) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 644 et 645.

([2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II ; 1888.

grale abélienne. Ces différents géomètres se sont placés surtout au point de vue transcendant. En étudiant algébriquement le problème de la réduction d'une intégrale hyperelliptique à une intégrale hyperelliptique de genre moindre, j'ai obtenu un certain nombre de résultats dont je citerai les principaux : 1° Les seules substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique à une intégrale hyperelliptique du même genre sont les substitutions linéaires; 2° il existe une infinité de substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale elliptique à une intégrale hyperelliptique de genre donné; au contraire, il n'existe qu'un nombre *fini* de substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique de genre $p > 1$ à une intégrale hyperelliptique de genre $q > p$; 3° les coefficients d'un type réductible, de genre q, ramené à une forme normale, dépendent au plus de q paramètres arbitraires.

M. Picard avait démontré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XI) que, s'il existe une intégrale de la forme $\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{R(x)}} dx$, où $R(x)$ est un polynome du cinquième ou du sixième degré, possédant seulement deux périodes, il en existe une seconde de la même forme, jouissant de la même propriété; ces deux intégrales peuvent se ramener à des intégrales elliptiques par des substitutions rationnelles de même degré D. Lorsque $D = 2$, les racines de $R(x)$ sont deux à deux en involution, et les deux intégrales réductibles peuvent se ramener à une forme simple indiquée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 8). Dans le cas où $D = 3$, on ne connaissait qu'un type particulier, découvert par M. Hermite. J'ai obtenu la forme générale des intégrales hyperelliptiques de genre 2, qui sont réductibles, par une substitution du troisième degré, aux intégrales elliptiques. Ces deux intégrales peuvent se ramener à une forme canonique simple, dépendant de deux paramètres arbitraires essentiellement distincts. Ce cas de réduction a été étudié depuis par MM. Brioschi (1), Burkhardt (2), O. Bolza (3).

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII, p. 227.
(2) *Mathematische Annalen*, Bd XXXVI, p. 410.
(3) *Mathematische Annalen*, Bd L, p. 314.