SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS MODULAIRES ET LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649777969

Sur la Théorie des Équations Modulaires et la Résolution de l'Équation du Cinquième Degré by Charles Hermite

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

CHARLES HERMITE

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS MODULAIRES ET LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ

Trieste

SUR LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS MODULAIRES

ET LA

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier,
rue du Jardinet, 12.

SUR LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS MODULAIRES

ET LA

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ,

PAR M. HERMITE.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1859

VENERANDÆ MEMORIÆ
EXIMII VIRI AUGUSTINI CAUCHY,

HOC QUALECUMQUE MUNUS
LIBENTER ACCIPIAS,
ET EX BEATA ÆTERNÆ FELICITATIS SEDE
ANIMUM SANCTÆ AMICITIÆ PIE MEMOREM
BENIGNE ASPICERE DIGNERIS.

TABLE DES MATIÈRES.

SUR LA RÉSOLUTION

DE

L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

On sait que l'équation générale du cinquième degré peut être ramenée, par une substitution dont les coefficients se déterminent sans employer d'autres irrationnalités que des radicaux carrés et cubiques, à la forme

$$x^5 - x - a = 0.$$

Ce résultat remarquable, dû au géomètre anglais M. Jerrard, est le pas le plus important qui ait été fait dans la théorie algébrique des équations du cinquième degré, depuis qu'Abel a démontré qu'il était impossible de les résoudre par radicaux. Cette impossibilité manifeste en effet la nécessité d'introduire quelque élément analytique nouveau dans la recherche de la solution, et à ce titre il semble naturel de prendre comme auxiliaire les racines de l'équation si simple dont nous venons de parler. Toutefois, pour légitimer véritablement son emploi comme élément essentiel de la résolution de l'équation générale, il restait à voir si cette simplicité de forme permettait effectivement d'arriver à quelque notion sur la nature de ses racines, de manière à saisir ce qu'il y a de propre et d'essentiel dans le mode d'existence de ces quantités, dont on ne sait jusqu'ici rien autre chose, si ce n'est qu'elles ne s'expriment point par radicaux. Or il est bien remarquable que l'équation de M. Jerrard se prête avec la plus grande facilité à cette recherche, et soit même, dans le sens que nous allons expliquer, susceptible d'une véritable résolution analytique. On peut en effet concevoir la question de la résolution des équations algébriques sous un point de vue différent de celui qui depuis longtemps a été indiqué par la résolution des équations des quatre premiers degrés, et auquel on s'est surtout attaché. Au lieu de chercher à représenter par une formule radicale à déterminations multiples le système des racines si étroitement liées entre elles lorsqu'on les considère comme fonctions des coefficients, on peut, ainsi que l'exemple en a été donné dans le troisième degré, chercher, en introduisant des variables auxiliaires, à obtenir les racines séparément exprimées par autant de fonctions distinctes et uniformes relatives à ces nouvelles variables. Dans le cas dont nous venons de parler, où il s'agit de l'équation

$$x^3 - 3x + 2a = 0,$$

il suffit, comme on sait, de représenter le coefficient a par le sinus d'un arc α pour que les racines se séparent en ces trois fonctions bien déterminées

$$2 \sin \frac{\alpha}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

Or c'est un fait tout semblable que nous avons à exposer relativement à l'équation

$$x^5 - x - a = 0.$$

Seulement, au lieu des sinus ou cosinus, ce sont les transcendantes elliptiques qu'il sera nécessaire d'introduire, et nous allons en premier lieu en rappeler les définitions.

Soient K et K' les fonctions complètes de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

et

$$q = e^{-\pi \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}};$$

la racine quatrième du module et de son complément s'exprime au moyen de q par ces fonctions dont Jacobi a fait la découverte, savoir :

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 - \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^m q^{6m^2 + 2m}}{\sum (-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{4m^2 + 2m}}{\sum q^{2m^2 + m}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q - q^3 + q^6 + \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^m q^{2m^2 + m}}{\sum (-1)^m q^{2m^2}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{2m^2 + m}}{\sum q^{m^2}},$$