

GEOMETRIE DER ZAHLEN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649007943

Geometrie der Zahlen by Hermann Minkowski

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

HERMANN MINKOWSKI

**GEOMETRIE
DER ZAHLEN**

M. K.
M. 6532

GEOMETRIE DER ZAHLEN

VON

HERMANN MINKOWSKI

EB

26 4751
13 2 32

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1910

Vorwort der Herausgeber.

Von der „Geometrie der Zahlen“ erschien die erste Lieferung, S. 1—240, im Jahre 1896. Das Erscheinen der zweiten Lieferung verzögerte sich, da sich einige unerwartete Schwierigkeiten einstellten, und Minkowski veröffentlichte später den größten Teil der Resultate, die dort entwickelt werden sollten, in verschiedenen kleineren Abhandlungen. (In der Gesamtausgabe der Abhandlungen sind es die Nummern XIII—XXI.)

Der Bogen, den wir als zweite Lieferung veröffentlichen, fand sich als vollständig abgeschlossenes Manuskript im Nachlasse, und wir handeln nach dem Wunsche des Verfassers, wenn wir ihn für sich herausgeben und so dem Werke einen gewissen Abschluß verleihen.

Ein Verzeichnis der im Buche enthaltenen Bezeichnungen und Ausdrücke ist hinzugefügt worden.

David Hilbert. Andreas Speiser.

Anzeige zur Geometrie der Zahlen.

(Mittheilungen von B. G. Teubner, 1893 S. 7.)

Diese Schrift enthält eine neue Art Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie oder, besser gesagt, knüpft ein neues Band zwischen diesen zwei Gebieten. Es werden hier in Bezug auf eine Klasse von vielfachen Integralen einige Ungleichungen entwickelt, die eine fundamentale Bedeutung haben für Fragen über approximative Auflösung von Gleichungen durch rationale Zahlen und für Probleme, welche mit derartigen Fragen zusammenhängen.

Die wesentlichste Anregung verdankt diese Schrift den Briefen von Herrn Hermite an Jacobi „sur différents objets de la théorie des nombres“ im 40. Bande des Crelle'schen Journals. Herr Hermite stellt dort den Satz auf, dass man in einer positiven quadratischen Form für die Variablen immer solche ganze Zahlen, die nicht sämtlich Null sind, einsetzen kann, dass der Werth der Form eine, ganz allein durch die Determinante der Form ausgedrückte Grenze nicht überschreitet, und er erweist diesen Satz als ein mächtiges Hilfsmittel der Zahlentheorie in solchen Fragen, wie sie soeben bezeichnet wurden.

Die ebenfalls im 40. Bande des Crelle'schen Journals gedruckte Abhandlung von Dirichlet „Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen“ legte es mir nahe, die jenem Satze von Herrn Hermite entsprechende Eigenschaft des Ellipsoids geometrisch zu deuten, und ich erhielt zunächst für jenen Satz einen neuen und ergiebigeren Beweis, den ich im 107. Bande des Crelle'schen Journals' auseinander gesetzt habe. In der Folge bemerkte ich, dass die betreffende Eigenschaft des Ellipsoids allein in dem Umstande ihren Grund hat, dass das Ellipsoid eine nirgends concave Fläche mit Mittelpunkt ist, und ich wurde dadurch auf ein arithmetisches Princip von besonderer Fruchtbarkeit aufmerksam; es beruht die vielseitige Verwendung dieses Princips auf der Mannigfaltigkeit von Einzelgestalten, die eine nirgends concave Fläche mit Mittelpunkt darzubieten imstande ist.

Dieses Princip ist, mit einigen Zusätzen, im dritten Kapitel der angezeigten Schrift entwickelt. Das erste Kapitel enthält eine eingehende Begründung der Eigenschaften der nirgends concaven Flächen. Im zweiten habe ich, um über den Boden, auf dem diese Unter-

suchungen sich aufbauen, Klarheit zu verschaffen, und auch, um ihren elementaren Charakter besser hervortreten zu lassen, einige hier zu verwendende bekannte Sätze aus der Functionenlehre mit ihren Beweisen dargestellt. Das vierte bis siebente Kapitel enthalten Anwendungen des in Rede stehenden Princips auf die approximative Auflösung von Gleichungen durch rationale Zahlen und durch ganze Zahlen, auf die Theorie der algebraischen Zahlen, auf die Theorie der quadratischen Formen usw., und das achte Kapitel endlich eine besondere Untersuchung, die mit jenem Principe in loserem Zusammenhange steht.

Geometrie der Zahlen habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin. Doch ist die Darstellung durchweg analytisch, wie dies schon durch den Umstand geboten war, dass ich von Anfang an eine Mannigfaltigkeit beliebiger Ordnung betrachte.

Ankündigung.

(2. Umschlagseite der ersten Lieferung dieses Werkes.)

Die in diesem Buche mitgetheilten Untersuchungen berühren grundlegende Fragen der mathematischen Wissenschaft. Sie bringen einige allgemeine und sehr fruchtbare Principien über die Annäherung an beliebige Grössen mittelst der Reihe der ganzen Zahlen. Ich bin zu meinen Sätzen durch räumliche Anschauungen gekommen (über ihre Vorgeschichte s. die Mittheilungen von B. G. Teubner, 1893 S. 7 (vgl. S. IV und V dieses Werkes)). Weil aber die Beschränkung auf eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen unthunlich erschien, so habe ich die Darstellung hier rein analytisch gefasst, nur befeissige ich mich des Gebrauchs solcher Ausdrücke, die geeignet sind, geometrische Vorstellungen wachzurufen. Die Beweise der Sätze offenbaren den intimsten Zusammenhang des hier erörterten Theils der Zahlentheorie mit den Fundamenten der Analysis des Unendlichen. Um diese Verknüpfung recht in's Licht zu setzen, ist hier auch manches Bekannte von Grund aus entwickelt. Die Lectüre des Buches erfordert daher nur geringe Vorkenntnisse, wenn auch selbstverständlich eine gewisse mathematische Bildung.

Der behandelte Stoff betrifft vielfach Gebiete, die gegenwärtig im Vordergrund des mathematischen Interesses stehen. Da nun die vollständige Fertigstellung des Buches erst in einigen Monaten zu erwarten ist, so habe ich mich entschlossen, um mehreren mir geäußerten Wünschen zu entsprechen, einen seit längerer Zeit gedruckten Theil schon jetzt zu publiciren. Diese Lieferung entwickelt bereits die meisten allgemeinen Theoreme. Die Schlusslieferung wird noch mancherlei Anwendungen derselben bringen; sie soll im Laufe des Sommers erscheinen. Ihr Umfang wird nicht 10 Bogen übersteigen. Über ihren Inhalt entnimmt man Einiges aus meinen Aufsätzen im Bulletin des sciences mathématiques, Januar 1893 und in den Annales de l'école normale supérieure, Februar 1896. Der verehrlichen Verlagsbuchhandlung bin ich für vielfaches Entgegenkommen während des Drucks wie jetzt bei der Theilung dieser Publication sehr zu Dank verpflichtet.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Von den nirgends concaven Flächen.

1. Eine Functionalungleichung. S. 1. — 2. Distanzcoefficienten. S. 2. — 3. Obere Grenze für einhellige Distanzcoefficienten. S. 3. — 4. Stetigkeit einhelliger Strahldistanzen. S. 4. — 5. Ueber Punktmengen mit unendlich vielen Punkten. S. 5. — 6. Untere Grenze für einhellige Distanzcoefficienten. S. 7. — 7. Die Aichfläche und der Aichkörper von Strahldistanzen. S. 9. — 8. Der Aichkörper einhelliger Strahldistanzen. S. 11. — 9. Die einfachsten, durch Ebenen bestimmten Bereiche. S. 14. — 10. Zellen im Aichkörper. S. 17. — 11. Die Aichfläche als Begrenzung des Aichkörpers. S. 18. — 12. Ein Hilfssatz über die Begrenzung einer Vereinigung von Zellen. S. 20. — 13. Annäherung an die Aichfläche durch eingeschriebene Flächenzellen. S. 25. — 14. Weitere Annäherung an die Aichfläche. S. 28. — 15. Annäherung an die Aichfläche vom Aeusseren des Aichkörpers her. S. 31. — 16. Die Stützebenen der Aichfläche. S. 33. — 17. Die nirgends concaven Flächen. S. 35. — 18. Die überall convexen Flächen. S. 38. — 19. Anhang über lineare Ungleichungen. S. 39.

Zweites Kapitel. Vom Volumen der Körper.

20. Untere und obere Grenze einer Menge von Größen. S. 46. — 21. Verhalten einer stetigen Function in Bezug auf die Grenzen ihrer Werthe. S. 48. — 22. Gleichmässige Stetigkeit in abgeschlossenen Punktmengen. S. 50. — 23. Bemerkungen über Bereiche, die aus Würfeln zusammengesetzt sind. S. 53. — 24. Strahlenkörper. S. 55. — 25. Volumen eines Strahlenkörpers. S. 56. — 26. Volumen einer Vereinigung von Strahlenkörpern. S. 62. — 27. Volumen eines Parallelepipedium. S. 63. — 28. Verhalten der Volumina bei linearer Transformation der Coordinaten. S. 69. — 29. Untere Grenze für einhellige Distanzcoefficienten. S. 71.

Drittes Kapitel. Körper, die infolge ihres Volumens mehr als einen Punkt mit ganzzahligen Coordinaten enthalten.

30. Arithmetischer Satz über die nirgends concaven Körper mit Mittelpunkt. S. 73. — 31. Stufen im Zahlengitter. S. 77. — 32. Stufen grössten Volumens. S. 81. — 33. Weiteres über den lückenlosen Aufbau von Stufen grössten Volumens. S. 86. — 34. Ebene Begrenzung bei den Stufen grössten Volumens. S. 91. — 35. Aneinanderfügung der Wände in Stufen grössten Volumens. S. 96.

Viertes Kapitel. Anwendungen der vorübergehenden Untersuchung.

36. Lineare Formen mit ganzzahligen Unbestimmten und mit beliebigen reellen Coefficienten. S. 102. — 37. Arithmetischer Satz über n lineare Formen mit n Variablen. S. 104. — 38. Annäherung an reelle Grössen durch rationale Zahlen. S. 108. — 39. Lineare Formen mit complexen Coefficienten. S. 113. —

40. Summen von Potenzen linearer Formen. S. 115. — 41. Die kritischen Primzahlen zu einer algebraischen Zahl. S. 123. — 42. Untere Grenze für den absoluten Betrag einer Discriminante. S. 133. — 43. Einheitswurzeln in einem Gattungsbereich algebraischer Zahlen. S. 135. — 44. Theorem von Dirichlet über die complexen Einheiten. S. 137. — 45. Arithmetische Theorie eines Linienpaars; Theorie der Kettenbrüche und der reellen quadratischen Irrationalzahlen. S. 147.

Fünftes Kapitel. Eine weitere analytisch-arithmetische Ungleichung.

46. Reduction des Zahlengitters in Bezug auf gegebene Richtungen. S. 172 — 47. Kleinstes System von Strahldistanzen im Zahlengitter. S. 176. — 48. Eine Anwendung auf die endlichen Gruppen ganzzahliger linearer Substitutionen. S. 180. — 49. Von den positiven quadratischen Formen und ihren ganzzahligen Transformationen in sich. S. 182. — 50. Oekonomie der kleinsten Strahldistanzen. S. 187. — 51. Arithmetisches über Ellipsoide. Endlichkeit von Klassenanzahlen bei positiven quadratischen Formen. S. 196. — 52. Berechnung eines Volumens durch successive Integrationen. S. 199. — 53. Beweis der neuen analytisch-arithmetischen Ungleichung. S. 211. — 54. Weitere Hilfssätze über Volumina. S. 219. — 55. Die extremen Aichkörper. S. 224. — 56. Eine Hilfsbetrachtung über Ovale. S. 236. — 57. Ungleichung zwischen den Volumina dreier Parallelschnitte eines nirgends concaven Körpers. S. 243.

Register. S. 256.