GEOMETRIE DER ZAHLEN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649007943

Geometrie der Zahlen by Hermann Minkowski

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

HERMANN MINKOWSKI

GEOMETRIE DER ZAHLEN

Trieste

GEOMETRIE DER ZAHLEN

VON

HERMANN MINKOWSKI

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Vorwort der Herausgeber.

Von der „Geometrie der Zahlen" erschien die erste Lieferung, S. 1—240, im Jahre 1896. Das Erscheinen der zweiten Lieferung verzögerte sich, da sich einige unerwartete Schwierigkeiten einstellten, und Minkowski veröffentlichte später den größten Teil der Resultate, die dort entwickelt werden sollten, in verschiedenen kleineren Abhandlungen. (In der Gesamtausgabe der Abhandlungen sind es die Nummern XIII—XXI.)

Der Bogen, den wir als zweite Lieferung veröffentlichen, fand sich als vollständig abgeschlossenes Manuskript im Nachlasse, und wir handeln nach dem Wunsche des Verfassers, wenn wir ihn für sich herausgeben und so dem Werke einen gewissen Abschluß verleihen.

Ein Verzeichnis der im Buche enthaltenen Bezeichnungen und Ausdrücke ist hinzugefügt worden.

David Hilbert. Andreas Speiser.

Anzeige zur Geometrie der Zahlen.

(Mitteilungen von B. G. Teubner, 1893 S. 7.)

Diese Schrift enthält eine neue Art Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie oder, besser gesagt, knüpft ein neues Band zwischen diesen zwei Gebieten. Es werden hier in Bezug auf eine Klasse von vielfachen Integralen einige Ungleichungen entwickelt, die eine fundamentale Bedeutung haben für Fragen über approximative Auflösung von Gleichungen durch rationale Zahlen und für Probleme, welche mit derartigen Fragen zusammenhängen.

Die wesentlichste Anregung verdankt diese Schrift den Briefen von Herrn Hermite an Jacobi „sur différents objets de la théorie des nombres" im 40. Bande des Crelle'schen Journals. Herr Hermite stellt dort den Satz auf, dass man in einer positiven quadratischen Form für die Variabeln immer solche ganze Zahlen, die nicht sämtlich Null sind, einsetzen kann, dass der Werth der Form eine, ganz allein durch die Determinante der Form ausgedrückte Grenze nicht überschreitet, und er erweist diesen Satz als ein mächtiges Hülfsmittel der Zahlentheorie in solchen Fragen, wie sie soeben bezeichnet wurden.

Die ebenfalls im 40. Bande des Crelle'schen Journals gedruckte Abhandlung von Dirichlet „Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen" legte es mir nahe, die jenem Satze von Herrn Hermite entsprechende Eigenschaft des Ellipsoids geometrisch zu deuten, und ich erhielt zunächst für jenen Satz einen neuen und ergiebigeren Beweis, den ich im 107. Bande des Crelle'schen Journals auseinander gesetzt habe. In der Folge bemerkte ich, dass die betreffende Eigenschaft des Ellipsoids allein in dem Umstande ihren Grund hat, dass das Ellipsoid eine nirgends concave Fläche mit Mittelpunkt ist, und ich wurde dadurch auf ein arithmetisches Princip von besonderer Fruchtbarkeit aufmerksam; es beruht die vielseitige Verwendung dieses Princips auf der Mannigfaltigkeit von Einzelgestalten, die eine nirgends concave Fläche mit Mittelpunkt darzubieten imstande ist.

Dieses Princip ist, mit einigen Zusätzen, im dritten Kapitel der angezeigten Schrift entwickelt. Das erste Kapitel enthält eine eingehende Begründung der Eigenschaften der nirgends concaven Flächen. Im zweiten habe ich, um über den Boden, auf dem diese Untersuchungen sich aufbauen, Klarheit zu verschaffen, und auch, um ihren elementaren Charakter besser hervortreten zu lassen, einige hier zu verwendende bekannte Sätze aus der Functionenlehre mit ihren Beweisen dargestellt. Das vierte bis siebente Kapitel enthalten Anwendungen des in Rede stehenden Princips auf die approximative Auflösung von Gleichungen durch rationale Zahlen und durch ganze Zahlen, auf die Theorie der algebraischen Zahlen, auf die Theorie der quadratischen Formen usw., und das achte Kapitel endlich eine besondere Untersuchung, die mit jenem Principe in loserem Zusammenhange steht.

Geometrie der Zahlen habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin. Doch ist die Darstellung durchweg analytisch, wie dies schon durch den Umstand geboten war, dass ich von Anfang an eine Mannigfaltigkeit beliebiger Ordnung betrachte.

Ankündigung.

(2. Umschlagseite der ersten Lieferung dieses Werkes.)

Die in diesem Buche mitgetheilten Untersuchungen berühren grundlegende Fragen der mathematischen Wissenschaft. Sie bringen einige allgemeine und sehr fruchtbare Principien über die Annäherung an beliebige Grössen mittelst der Reihe der ganzen Zahlen. Ich bin zu meinen Sätzen durch räumliche Anschauungen gekommen (über ihre Vorgeschichte s. die Mittheilungen von B. G. Teubner, 1893 S. 7 (vgl. S. IV und V dieses Werkes)). Weil aber die Beschränkung auf eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen unthunlich erschien, so habe ich die Darstellung hier rein analytisch gefasst, nur befleissige ich mich des Gebrauchs solcher Ausdrücke, die geeignet sind, geometrische Vorstellungen wachzurufen. Die Beweise der Sätze offenbaren den intimsten Zusammenhang des hier erörterten Theils der Zahlentheorie mit den Fundamenten der Analysis des Unendlichen. Um diese Verknüpfung recht in's Licht zu setzen, ist hier auch manches Bekannte von Grund aus entwickelt. Die Lectüre des Buches erfordert daher nur geringe Vorkenntnisse, wenn auch selbstverständlich eine gewisse mathematische Bildung.

Der behandelte Stoff betrifft vielfach Gebiete, die gegenwärtig im Vordergrund des mathematischen Interesses stehen. Da nun die vollständige Fertigstellung des Buches erst in einigen Monaten zu erwarten ist, so habe ich mich entschlossen, um mehreren mir geäusserten Wünschen zu entsprechen, einen seit längerer Zeit gedruckten Theil schon jetzt zu publiciren. Diese Lieferung entwickelt bereits die meisten allgemeinen Theoreme. Die Schlusslieferung wird noch mancherlei Anwendungen derselben bringen; sie soll im Laufe des Sommers erscheinen. Ihr Umfang wird nicht 10 Bogen übersteigen. Über ihren Inhalt entnimmt man Einiges aus meinen Aufsätzen im Bulletin des sciences mathématiques, Januar 1893 und in den Annales de l'ecole normale superieure, Februar 1896. Der verehrlichen Verlagsbuchhandlung bin ich für vielfaches Entgegenkommen während des Drucks wie jetzt bei der Theilung dieser Publication sehr zu Dank verpflichtet.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Von den nirgends concaven Flächen.

Zweites Kapitel. Vom Volumen der Körper.

Drittes Kapitel. Körper, die infolge ihres Volumens mehr als einen Punkt mit ganzzahligen Coordinaten enthalten.

Viertes Kapitel. Anwendungen der vorhergehenden Untersuchung.