

**ELEMENTAR-
SYNTHETISCHE
GEOMETRIE DER
GLEICHSEITIGEN HYPERBEL**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649771936

Elementar-Synthetische Geometrie der Gleichseitigen Hyperbel by A. Milnowski

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

A. MILNOWSKI

**ELEMENTAR-
SYNTHETISCHE
GEOMETRIE DER
GLEICHSEITIGEN HYPERBEL**

Vorwort.

Die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel findet man in den Lehrbüchern über Kegelschnitte meist aus denjenigen der allgemeinen Hyperbel hergeleitet. Deshalb kann die Herleitung nicht denjenigen Grad der Einfachheit erreichen, zu dem man unschwer gelangt, wenn man von gewissen charakteristischen Beziehungen ausgeht. Die hauptsächlichsten sind wohl die beiden folgenden, von denen jede sofort auf die andere zurückgeführt werden kann: 1) Die gleichseitige Hyperbel ist das Erzeugnis zweier gleicher und ungleichlaufender projektivischer Strahlenbüschel oder elementar ausgedrückt, jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln. 2) Der Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf derselben. — Steiner beweist diesen Satz (cf. die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Geiser) mittelst des Paskalschen Satzes und durch Polarisation und auch sonst ist ein recht einfacher elementarer Beweis desselben nicht gegeben.

Bei einer Theorie der gleichseitigen Hyperbel müßte man also naturgemäß von jener zuerst genannten Erzeugungsart ausgehen und man gelangt in der That mittelst derselben (112—121) zu den wesentlichsten Eigenschaften in durchaus einfacher Weise. Wenn trotzdem ein anderer Weg eingeschlagen ist, der übrigens ebenso leicht zu den wichtigsten Sätzen führt, so geschah dies aus dem Grunde, daß man auf denselben auch gleichzeitig zur Theorie der allgemeinen Hyperbel gelangt. Dieser Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von den der Hyperbel eigentümlichen Eigenschaften der

Asymptoten. Schon die einfache Form der Hyperbelgleichung in Bezug auf die Asymptoten führt darauf, die durch dieselbe ausgedrückte Beziehung zum Ausgangspunkte zu wählen. Diese Gleichung sagt aber aus, daß jede Tangente auf den Asymptoten Strecken von konstantem Produkte begrenzt.

Dadurch wird man auf den Gedanken geführt, eine analoge Eigenschaft, die der Ellipse und Hyperbel gemeinsam zukommt, als Ausgangspunkt einer gemeinschaftlichen Behandlung beider Kurven zu wählen. Diese Eigenschaft, daß jede Tangente auf den Scheiteltangenten Strecken von konstantem Produkte begrenzt, führt auch wirklich (221—227) in einfachster Weise zu den beiden Hauptarten von Eigenschaften der Kegelschnitte, zu denen der Brennpunkte und zu den harmonischen Eigenschaften.

Der tiefere Grund für diese leichte Herleitung der harmonischen Beziehungen aus den genannten Eigenschaften ist wohl darin zu suchen, daß diese in metrischer Form ausgedrückten Eigenschaften eine fundamentale harmonische Beziehung zwischen vier Tangenten und in unmittelbarer Folge zwischen vier Punkten eines Kegelschnittes darstellen. Sie lassen sich in die Form bringen: Wenn vier Tangenten eine Scheiteltangente oder eine Asymptote harmonisch schneiden, so schneiden sie auch die andere und endlich jede Tangente harmonisch. — Auch bei der Parabel läßt sich diese Herleitung, in geeigneter Weise modifiziert (252—254) zur Anwendung bringen.

Die harmonischen Eigenschaften treten sofort, auch bei der elementaren Behandlung, in den Mittelpunkt der Betrachtung und erst die Erkenntnis der innigen Beziehungen zwischen den Brennpunkte- und Polareigenschaften läßt auch die harmonische Natur der ersteren hervortreten. Diese Beziehungen möglichst klar und einfach darzustellen wird das Ziel jeder elementaren Behandlung der Kegelschnitte sein müssen.

Die erste elementare Ableitung der Polareigenschaften, wenigstens für die Parabel, findet sich wohl in der kleinen Schrift von Simon: „Die Kegelschnitte behandelt für die Repetition in der Gymnasialprima. I. Teil. Die Parabel.“ Für alle drei Kegelschnitte gab darauf der Verfasser mehrere ele-

mentare Ableitungen (cf. Milinowski: „Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, bei Teubner,“ und „die Kegelschnitte, behandelt für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Berlin bei Calvary“). Eine andere Ableitung findet sich in dem Buche von Taylor: „An introduction to the ancient and modern geometry of conics.“ Alle diese Ableitungen beruhen entweder auf der Abbildung des Kegelschnittes auf einem Kreise und setzen also die Polarentheorie desselben voraus oder sie haben doch nicht den wünschenswerten Grad von Einfachheit. — In den bairischen Blättern für das Realschulwesen hat neuerdings Haase eine Methode angegeben, die gleichzeitig die Eigenschaften der Brennpunkte und die harmonischen Eigenschaften und zwar für alle drei Kegelschnitte (158—161, 233, 234, 251) aus dem Satze herleitet, daß die vier Geraden, welche zwei Punkte eines Kegelschnittes mit den beiden Brennpunkten verbinden, einen Kreis berühren. Zwar setzt diese Methode die Polarentheorie des Kreises nicht voraus, nimmt aber doch entferntere Kreiseigenschaften in Anspruch, so z. B. den Satz, daß von den Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise viermal je drei in einer Geraden liegen.

Der oben angegebene Satz von den Asymptoten und Scheiteltangenten führt ungemein einfach und nur mit Benutzung harmonischer Beziehungen zu der fundamentalen harmonischen Eigenschaft eines Kegelschnittes, daß vier Punkte desselben, welche aus einem fünften Punkte durch harmonische Strahlen projiziert werden, aus jedem Kegelschnittspunkte durch solche Strahlen projiziert werden. Aus ihr fließt die Polarentheorie (207, 221—227) der Kegelschnitte. Für die gleichseitige Hyperbel folgt die letzte unmittelbar aus dem Satze, daß jede Sehne den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln erscheint. (37.)

Zur Übertragung von Kreiseigenschaften auf den Kegelschnitt sind zwei Methoden zur Verwendung gekommen, diejenige der Centralprojektion (§ 5) und (153, 155, 260, 276) die der harmonischen Verwandtschaft (cf. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte). Die letztere

ist in mancher Beziehung, namentlich aber da, wo es sich um Ausführung von Konstruktionen handelt, der ersten vorzuziehen, welche trotz größerer Anforderungen an die Vorstellungskraft besonders bei Herleitung metrischer Beziehungen schwerer anzuwenden ist. Dazu kommt, daß die Handhabung des harmonischen Gebildes wegen seiner gleichzeitigen metrischen und Lagenbeziehungen ein vermittelndes Band bildet zwischen den bisherigen elementaren Betrachtungsweisen und den Methoden der Geometrie der Lage.

Im sechsten Paragraphen finden sich Ergänzungen und Aufgaben, unter denen die Konstruktion des Krümmungskreises (82—88), die Dreiteilung des Winkels (104. 271.), das Delische Problem (105—106), die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus zwei Punkten und Tangenten (182—184.), die Erzeugung derselben mittelst des Kreisbüschels (125—128) und aus der Geraden (112—121) hervorgehoben werden mögen. Einzelne der Aufgaben dieses Paragraphen sind dem schon oben angeführten Werke von Taylor entnommen, der sie ohne Auflösung mitteilt.

Wegen der mannigfachen Beziehungen der gleichseitigen Hyperbel zu den übrigen Kegelschnitten sind die wesentlichsten Eigenschaften derselben im letzten Paragraphen zusammengestellt.

Unter allen Kegelschnitten ist keiner der elementaren Behandlung so zugänglich, wie die gleichseitige Hyperbel und trotzdem besitzt unsere mathematische Literatur kein Buch, welches die Eigenschaften derselben in elementarer und einheitlicher Weise im Zusammenhange darstellt. Dieses Ziel hat sich der Verfasser in vorliegendem Werkchen gesteckt und hofft dadurch Allen, welche Beruf oder Neigung zur elementaren Betrachtung der Kegelschnitte führen, keine unwillkommene Gabe darzubringen. Namentlich aber hofft er dadurch auch dem Gedanken, daß das harmonische Gebilde ein durchaus elementares ist, weitere Geltung und der Anwendung desselben in der elementaren Geometrie größere Ausbreitung zu verschaffen.

Weißenburg im E., April 1883.

Millnowski.

Inhalt.

§ 1.

Punkte und Tangenten.

	Seite
1—2. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel mittelst ihrer Asymptoten; Konstruktion von Punkten der gleichseitigen Hyperbel; Gleichung derselben in Bezug auf die Asymptoten	1
3—7. Konstruktion von Tangenten und Eigenschaften derselben	3
8. Gleichheit je zweier Winkel über einer Sehne, deren Scheitel Endpunkte eines Durchmessers sind	5
9. Der Höhenpunkt eines eingeschriebenen Dreiecks	7
11—14. Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel durch vier Punkte	9
15. Schnitt eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel	11
16—17. Eigenschaften der Asymptoten	11
18. Vom Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise	13
19. Der Gauß-Bodenmillersche Satz	14
20. Von den Höhenpunkten der vier Dreiecke, welche von vier Geraden gebildet werden	15
21—22. Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus vier Tangenten	18

§ 2.

Konjugierte Durchmesser.

23. Definition der konjugierten Durchmesser	19
24. Eigenschaften derselben	19
25. Die konjugierte Hyperbel	20
26—27. Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser	21

§ 3.

Die Brennpunkte.

29. Definition der Brennpunkte	23
30—36. Brennpunkteigenschaften	24

§ 4.

Die Polareigenschaften.

37. Definition von Pol und Polare	26
38—39. Polareigenschaften	29
40. Konjugierte Punkte und Geraden; Poldreieck	31
41. Vom umgeschriebenen Viereck	31
42—43. Lage des Mittelpunktes der gleichseitigen Hyperbel auf dem Umkreise eines jeden Poldreiecks; Konstruktion derselben aus vier Tangenten	33
46. Andere Definition der Brennpunkte und Polareigenschaften derselben	35

§ 5.

Die gleichseitige Hyperbel auf dem geraden Kreiskegel.

	Seite
46—47. Die gleichseitige Hyperbel auf einem Kreiskegel, auf welchem jeder Achsenschnitt rechtwinklig ist	38
48—53. Einige Eigenschaften der Asymptoten	40
54. Die Brennpunkte und Leitlinien	45
55. Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Achsen und Asymptoten	46
56—59. Die gleichseitige Hyperbel auf einem beliebigen Kreiskegel	47
60—64. Aufgaben	50

§ 6.

Ergänzungen und Aufgaben.

65—71. Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel	58
72—74. Die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Geraden und einem Kreise	54
82—88. Aufgaben über den Krümmungskreis	55
90—91. Organische Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel	57
95—96. Das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebene gleichseitige Dreieck	57
97—101. Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel	58
102—103. Das eingeschriebene Parallelogramm	59
104. Einen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen	59
105—106. Das Delische Problem: Einen Würfel zu verdoppeln	60
107—108. Gleichseitige Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Durchmesser	61
109—110. Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus Punkten und Tangenten	61
111. Verschiedene Erzeugungsarten der gleichseitigen Hyperbel	62
112—121. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus der Geraden	63
122. Erzeugung derselben aus dem Kreise	65
123—124. Ort der Spitze eines Dreiecks von konstanter Grundlinie und konstanter Differenz der anliegenden Winkel	65
125—128. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus dem Kreisbüschel	66
129. Zwei unter einem sehr kleinen Winkel geneigte teilweise ins Wasser getauchte Glasplatten werden längs einer gleichseitigen Hyperbel benetzt	67
130—145. Aufgaben über konjugierte Durchmesser	68
146. Konstruktion der Achsen aus einem Punkte und dem Scheitelkreise	71
147—150. Konstruktion der Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel und eines Kreises oder zweier gleichseitigen Hyperbeln	71
151—152. Die Normalen und Tangenten durch einen Punkt	72

	Seite
153. Harmonische Beziehung zwischen der gleichseitigen Hyperbel und ihrem Scheitelkreise	73
154. Eigenschaften der Brennpunkte	75
155. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus dem Kreise	76
156—157. Aufgaben über die Brennpunkte, Konstruktion der Tangenten durch einen Punkt	78
158—161. Die Vektorenkreise und die Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel mittelst der Brennpunkte, nebst Ableitung ihrer Polareigenschaften	78
162—163. Andere Begründung der harmonischen Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel	85
164—171. Aufgaben über Pol und Polare und Poldreiecke	87
172—173. Aufgaben über Brennpunkte und Leitlinien	89
174—181. Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel	90
182—184. Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus zwei Punkten und zwei Tangenten	91

§ 7.

Hyperbel, Ellipse, Parabel.

186. Erzeugung der Hyperbel mittelst ihrer Asymptoten	92
190—191. Punkte und Tangenten der Hyperbel	92
192—193. Konjugierte Durchmesser	93
194—195. Die konjugierte Hyperbel	94
196—198. Eigenschaften konjugierter Durchmesser	95
199—206. Die Brennpunkte	96
207—213. Harmonische Eigenschaften der Hyperbel	99
214—218. Andere Ableitung der Brennpunkteigenschaften	103
219—220. Erzeugung der allgemeinen Hyperbel aus der gleichseitigen durch proportionale Änderung der Ordinaten; harmonische Beziehung dieser beiden Hyperbeln zu einer Ellipse und dem Scheitelkreise, von denen die erste aus dem zweiten auch durch gleichgroße proportionale Änderung der Ordinaten abgeleitet wird	107
221—227. Gemeinschaftlicher Ursprung von Ellipse und Hyperbel und gleichzeitige Ableitung ihrer Polar- und Brennpunkteigenschaften	109
228—234. Andere Ableitung der letzteren	112
235. Gleichung der Hyperbel und Ellipse in Bezug auf die Achsen	115
236—250. Parabel, Ellipse, Hyperbel	116
251. Herleitung der Polareigenschaften der Parabel aus dem Satze, daß die Geraden, welche zwei Parabelpunkte mit dem endlichen und unendlich fernen Brennpunkte verbinden, einen Kreis berühren	121
252—254. Andere Ableitung der Polareigenschaften der Parabel aus dem Satze: In zwei Parabelpunkten P und Q ziehe man die Tangenten p und q , schneide mit ihnen die Scheiteltangente in P_1 und Q_1 , und ziehe durch letztere	