ELEMENTAR-SYNTHETISCHE GEOMETRIE DER GLEICHSEITIGEN HYPERBEL

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649771936

Elementar-Synthetische Geometrie der Gleichseitigen Hyperbel by A. Milnowski

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

A. MILNOWSKI

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE GEOMETRIE DER GLEICHSEITIGEN HYPERBEL

Trieste

Vorwort.

Die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel findet man in den Lehrbüchern über Kegelschnitte meist aus denjenigen der allgemeinen Hyperbel hergeleitet. Deshalb kann die Herleitung nicht denjenigen Grad der Einfachheit erreichen, zu dem man unschwer gelangt, wenn man von gewissen charakteristischen Beziehungen ausgeht. Die hauptsächlichsten sind wohl die beiden folgenden, von denen jede sofort auf die andere zurückgeführt werden kann: 1) Die gleichseitige Hyperbel ist das Erzeugnis zweier gleicher und ungleichlaufender projektivischer Strahlenbüschel oder elementar ausgedrückt, jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln. 2) Der Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf derselben. — Steiner beweist diesen Satz (cf. die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Geiser) mittelst des Paskalschen Satzes und durch Polarisation und auch sonst ist ein recht einfacher elementarer Beweis desselben nicht gegeben.

Bei einer Theorie der gleichseitigen Hyperbel müfste man also naturgemäfs von jener zuerst genannten Erzeugungsart ausgehen und man gelangt in der That mittelst derselben (112—121) zu den wesentlichsten Eigenschaften in durchaus einfacher Weise. Wenn trotzdem ein anderer Weg eingeschlagen ist, der übrigens ebenso leicht zu den wichtigsten Sätzen führt, so geschah dies aus dem Grunde, dafs man auf demselben auch gleichzeitig zur Theorie der allgemeinen Hyperbel gelangt. Dieser Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von den der Hyperbel eigenthümlichen Eigenschaften der

Asymptoten. Schon die einfache Form der Hyperbelgleichung in Bezug auf die Asymptoten führt darauf, die durch dieselbe ausgedrückte Beziehung zum Ausgangspunkte zu wählen. Diese Gleichung sagt aber aus, dafs jede Tangente auf den Asymptoten Strecken von konstantem Produkte begrenzt.

Dadurch wird man auf den Gedanken geführt, eine analoge Eigenschaft, die der Ellipse und Hyperbel gemeinsam zukommt, als Ausgangspunkt einer gemeinschaftlichen Behandlung beider Kurven zu wählen. Diese Eigenschaft, dafs jede Tangente auf den Scheiteltangenten Strecken von konstantem Produkte begrenzt, führt auch wirklich (221—227) in einfachster Weise zu den beiden Hauptarten von Eigenschaften der Kegelschnitte, zu denen der Brennpunkte und zu den harmonischen Eigenschaften.

Der tiefere Grund für diese leichte Herleitung der harmonischen Beziehungen aus den genannten Eigenschaften ist wohl darin zu suchen, dafs diese in metrischer Form ausgedrückten Eigenschaften eine fundamentale harmonische Beziehung zwischen vier Tangenten und in unmittelbarer Folge zwischen vier Punkten eines Kegelschnittes darstellen. Sie lassen sich in die Form bringen: Wenn vier Tangenten eine Scheiteltangente oder eine Asymptote harmonisch schneiden, so schneiden sie auch die andere und endlich jede Tangente harmonisch. — Auch bei der Parabel läfst sich diese Herleitung, in geeigneter Weise modifiziert (252—254) zur Anwendung bringen.

Die harmonischen Eigenschaften treten sofort, auch bei der elementaren Behandlung, in den Mittelpunkt der Betrachtung und erst die Erkenntnis der innigen Beziehungen zwischen den Brennpunkts- und Polareigenschaften läfst auch die harmonische Natur der ersteren hervortreten. Diese Beziehungen möglichst klar und einfach darzustellen wird das Ziel jeder elementaren Behandlung der Kegelschnitte sein müssen.

Die erste elementare Ableitung der Polareigenschaften, wenigstens für die Parabel, findet sich wohl in der kleinen Schrift von Simon: „Die Kegelschnitte behandelt für die Repetition in der Gymnasialprima. I. Teil. Die Parabel." Für alle drei Kegelschnitte gab darauf der Verfasser mehrere elementare Ableitungen (cf. Milinowski: „Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, bei Teubner," und „die Kegelschnitte, behandelt für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Berlin bei Calvary"). Eine andere Ableitung findet sich in dem Buche von Taylor: „An introduction to the ancient and modern geometry of conics." Alle diese Ableitungen beruhen entweder auf der Abbildung des Kegelschnittes auf einem Kreise und setzen also die Polarentheorie desselben voraus oder sie haben doch nicht den wünschenswerten Grad von Einfachheit. — In den bairischen Blättern für das Realschulwesen hat neuerdings Haase eine Methode angegeben, die gleichzeitig die Eigenschaften der Brennpunkte und die harmonischen Eigenschaften und zwar für alle drei Kegelschnitte (158—161, 233, 234, 251) aus dem Satze herleitet, dafs die vier Geraden, welche zwei Punkte eines Kegelschnittes mit den beiden Brennpunkten verbinden, einen Kreis berühren. Zwar setzt diese Methode die Polarentheorie des Kreises nicht voraus, nimmt aber doch entferntere Kreiseigenschaften in Anspruch, so z. B. den Satz, dafs von den Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise viermal je drei in einer Geraden liegen.

Der oben angegebene Satz von den Asymptoten und Scheiteltangenten führt ungemein einfach und nur mit Benutzung harmonischer Beziehungen zu der fundamentalen harmonischen Eigenschaft eines Kegelschnittes, dafs vier Punkte desselben, welche aus einem fünften Punkte durch harmonische Strahlen projiziert werden, aus jedem Kegelschnittpunkte durch solche Strahlen projiziert werden. Aus ihr fliefst die Polarentheorie (207, 221—227) der Kegelschnitte. Für die gleichseitige Hyperbel folgt die letzte unmittelbar aus dem Satze, dafs jede Sehne den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln erscheint. (37.)

Zur Übertragung von Kreiseigenschaften auf den Kegelschnitt sind zwei Methoden zur Verwendung gekommen, diejenige der Centralprojektion (§ 5) und (153, 155, 260, 276) die der harmonischen Verwandtschaft (cf. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte). Die letztere ist in mancher Beziehung, namentlich aber da, wo es sich um Ausführung von Konstruktionen handelt, der ersten vorzuziehen, welche trotz gröfserer Anforderungen an die Vorstellungskraft besonders bei Herleitung metrischer Beziehungen schwerer anzuwenden ist. Dazu kommt, dafs die Handhabung des harmonischen Gebildes wegen seiner gleichzeitigen metrischen und Lagenbeziehungen ein vermittelndes Band bildet zwischen den bisherigen elementaren Betrachtungsweisen und den Methoden der Geometrie der Lage.

Im sechsten Paragraphen finden sich Ergänzungen und Aufgaben, unter denen die Konstruktion des Krümmungskreises (82—88), die Dreiteilung des Winkels (104. 271.), das Delische Problem (105—106), die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus zwei Punkten und Tangenten (182—184.), die Erzeugung derselben mittelst des Kreisbüschels (125—128) und aus der Geraden (112—121) hervorgehoben werden mögen. Einzelne der Aufgaben dieses Paragraphen sind dem schon oben angeführten Werke von Taylor entnommen, der sie ohne Auflösung mitteilt.

Wegen der mannigfachen Beziehungen der gleichseitigen Hyperbel zu den übrigen Kegelschnitten sind die wesentlichsten Eigenschaften derselben im letzten Paragraphen zusammengestellt.

Unter allen Kegelschnitten ist keiner der elementaren Behandlung so zugänglich, wie die gleichseitige Hyperbel und trotzdem besitzt unsere mathematische Literatur kein Buch, welches die Eigenschaften derselben in elementarer und einheitlicher Weise im Zusammenhange darstellt. Dieses Ziel hat sich der Verfasser in vorliegendem Werkchen gesteckt und hofft dadurch Allen, welche Beruf oder Neigung zur elementaren Betrachtung der Kegelschnitte führen, keine unwillkommene Gabe darzubringen. Namentlich aber hofft er dadurch auch dem Gedanken, dafs das harmonische Gebilde ein durchaus elementares ist, weitere Geltung und der Anwendung desselben in der elementaren Geometrie gröfsere Ausbreitung zu verschaffen.

Weifsenburg im E., April 1883.

Milinowski.

Inhalt.

§ 1.

Punkte und Tangenten.

§ 2.

Konjugierte Durchmesser.

§ 3.

Die Brennpunkte.

§ 4.

Die Polareigenschaften.

§ 5.

Die gleichseitige Hyperbel auf dem geraden Kreiskegel.

§ 6.

Ergänzungen und Aufgaben.

§ 7.

Hyperbel, Ellipse, Parabel.