NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, DEEL XX

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649657902

Nieuw Archief Voor Wiskunde, Deel XX by D. Bierens De Haan

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

D. BIERENS DE HAAN

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, DEEL XX

Trieste

[redacted]

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

Deel XX.

AMSTERDAM,
W. VERSLUYS.
1893.

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde" *wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam*, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

De Redacteur,

Leiden, Juli 1893. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,

onder de zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

OVER DE WETTEN VAN BEWERKING, WAARAAN DE EENHEDEN i, j EN k VAN HAMILTON ZIJN ONDERWORPEN,

DOOR

Th. B. VAN WETTUM.

---

1. Uit mijn vorig opstel — zie Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XVIII — blijkt, dat de matrix van vervorming van evenwijdige rechthoekige coördinaten der ruimte, bij behoud van oorsprong, altijd gelijkwaardig is met een wenteling, mits de determinant op dien matrix positief is.

Vatten wij kortelijk samen eenige vergelijkingen, die ons in het volgende nog zullen dienen. Waren de vergelijkingen voor de vervorming van coördinaten

$$(x'\,y'\,z') = \left|\begin{matrix} \alpha & c_2 & b_1 \\ c_1 & \beta & a_2 \\ b_2 & a_1 & \gamma \end{matrix}\right| (x\,y\,z), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

dan vonden wij de negen vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (1-\cos p)\cos^2 k_1 + \cos p, \\ \beta &= (1-\cos p)\cos^2 k_2 + \cos p, \\ \gamma &= (1-\cos p)\cos^2 k_3 + \cos p, \\ a_1 + a_2 &= 2\,(1-\cos p)\cos k_2 . \cos k_3, \\ b_1 + b_2 &= 2\,(1-\cos p)\cos k_3 . \cos k_1, \\ c_1 + c_2 &= 2\,(1-\cos p)\cos k_1 . \cos k_2, \\ a_1 - a_2 &= 2\sin p . \cos k_1, \\ b_1 - b_2 &= 2\sin p . \cos k_2, \\ c_1 - c_2 &= 2\sin p . \cos k_3 ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

terwijl de matrix in (A), door te stellen

$$\left.\begin{array}{r} \cos p = a\,, \\ \sin p.\cos k_1 = b\,, \\ \sin p.\cos k_2 = c\,, \\ \sin p.\cos k_3 = d\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

den vorm aannam, dien ik door $Q(a\,b\,c\,d)$ heb aangeduid, en waaraan ik den naam van Quaternion-Matrix heb gegeven, omdat zij werkelijk, met een bijkomenden Tensor vereenigd, van vier onderling onafhankelijke grootheden afhangt.

Deze vorm is

$$Q(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} \frac{b^2}{1+a}+a & \frac{bc}{1+a}-d & \frac{bd}{1+a}+c \\ \frac{bc}{1+a}+d & \frac{c^2}{1+a}+a & \frac{cd}{1+a}-b \\ \frac{bd}{1+a}-c & \frac{cd}{1+a}+b & \frac{d^2}{1+a}+a \end{vmatrix} \ldots \quad (3)$$

2. Het gevondene kwam dan eensdeels op het volgende neer. Door de vervorming van coördinaten, aangewezen door de vergelijkingen (A) veranderen de coördinaten (x, y, z) van een punt in (x', y', z'); maar dezelfde verandering ondergaan zij ook, wanneer men het coördinatenstelsel in negatieven zin over een hoek p wentelt om een as, die door den oorsprong gaat, en wier positieve richting met de positieve richtingen der coördinaten-assen de hoeken k_1, k_2 en k_3 maakt respectievelijk. Voor alle juistheid zijn de coördinaten-stelsels alleen zoo gekozen, dat daarin de wenteling om de positieve X-as, van de positieve Y-as naar de positieve Z-as in positieven zin 90° bedraagt.

3. Een kleine wijziging in opvatting der vergelijkingen (A) is nu de volgende. Denkt men zich het eerste coördinaten-stelsel O X Y Z als boven, maar vast, dan zal er op dit stelsel zoowel een punt P_1 aan te wijzen zijn met (x, y, z) tot coördinaten, als een punt P_2 met (x', y', z') tot coördinaten; maar men ziet ook terstond in, dat de oorsprongsvector $O\,P_1$ in den stand van den oorsprongsvector $O\,P_2$ komt door de wenteling om dezelfde as en over eenzelfden hoek als in **2** genoemd, maar in positieven zin wentelende.

Aldus opgevat krijgt de matrix $Q(a, b, c, d)$ in (3) de beteekenis van wentelaar, evenals HAMILTON die legde in zijne »eenheden" i, j en k als »quadrantal versors" of wentelaars om hoeken van 90° om drie onderling loodrechte assen van een als boven opgezet coördinaten-stelsel.

Noemen wij (x, y, z) als bepalende den oorsprongsvector $O P_1$, evenals HAMILTON $\mathbf{a}$ en (x', y', z') evenzoo $\mathbf{b}$, dan geven de vergelijkingen (A) symbolisch

$$\mathbf{b} = Q(a, b, c, d) \cdot \mathbf{a}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

welke vergelijking dan zegt:

> De oorsprongsvector $\mathbf{a}$ komt in den stand van den oorsprongsvector $\mathbf{b}$ door de wenteling aangeduid door $Q(a, b, c, d)$.

4. Wij komen nu gemakkelijk tot een voorstelling van de HAMILTON'sche »eenheden" i, j en k, naar diens eigen bepaling. Zoo moet i beduiden een wenteling om de x-as in positieven zin over een hoek van 90°; daarvoor hebben wij alleen te stellen $p = 90^\circ = k_2 = k_3$ en $k_1 = 0^\circ$. Gelijktijdig worden $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ en $d = 0$; dus komen wij gemakkelijk, evenzoo voor j en k besluitende, tot de symbolische vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}
i = Q(0, 1, 0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\[2ex]
j = Q(0, 0, 1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\[2ex]
k = Q(0, 0, 0, 1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}\right\} \ldots \ldots \quad (5)$$

Men kan gemakkelijk inzien, dat de negentermige symbolen in den vorm van matrices werkelijk de door i, j en k bedoelde standsveranderingen te weeg brengen.

5. Daar wij vertrouwd zijn met matrices-vermenigvuldiging vinden wij nu eerst