

**NIEUW ARCHIEF
VOOR WISKUNDE,
DEEL XX**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649657902

Nieuw Archief Voor Wiskunde, Deel XX by D. Bierens De Haan

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

D. BIERENS DE HAAN

**NIEUW ARCHIEF
VOOR WISKUNDE,
DEEL XX**



NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

Deel IX.

AMSTERDAM,
W. VERSLUYS.
1893.

Δ

Sci 900, 30



Sohier feunt

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde” wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.”

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

LEIDEN, Juli 1893.

DE REDACTEUR,

D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,

onder de zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ABBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

	Bladz.
Over de wetten van bewerking, waaraan de eenheden i, j en k van Hamilton zijn onderworpen, door TH. B. VAN WETTUM	1.
Over de ondeelbare deelen van $x^n - 1$, door N. L. W. A. GRAVELAAR.	7.
Vraagstuk N ^o . 7, opgelost door A. G. WYTHOF	96.
Over de Rodenberg'sche modellen van kubische oppervlakken met historische inleiding, door D. J. KORTEWEG	63.
Aanteekeningen, door D. J. KORTEWEG	79.
Naaschrift, door D. J. KORTEWEG	99.
Korte inhoud van de lezingen op de wetenschappelijke vergaderingen gehouden in den winter 1891—1892.	
1ste Vergadering. Over eene toepassing van de theorie der binaire vormen, door J. C. KLUYVER,	97.
2de Vergadering. Over de regelmatige lichamen en de groepentheorie, door P. H. SCHOUTE.	100.
3de Vergadering. Over het afsiden van regelvlakken van den derden en vierden graad uit de transformatie van den cirkel. (Nieuw Archief voor Wiskunde, deel XII), door A. N. GODEFROY	108.
— Over een vraagstuk van de conform afbeelding, door Dr. R. J. ESCHER	111.
4de Vergadering. Over de „Analysis Situs”, door Dr. R. H. VAN DORSTEN.	113.
5de Vergadering. Over Bessel'sche Functiën, door W. KAPTEYN	116.
Berekening van de benaderde waarde eener bepaalde integraal, door B. P. MOORS	129.

OVER DE WETTEN VAN BEWERKING,
WAARAAN DE EENHEDEN i, j EN k VAN HAMILTON
ZIJN ONDERWORPEN,

DOOR

TH. B. VAN WETTUM.

1. Uit mijn vorig opstel — zie Nieuw Archief voor Wis-
kunde, Deel XVIII — blijkt, dat de matrix van vervorming van
evenwijdige rechthoekige coördinaten der ruimte, bij behoud
van oorsprong, altijd gelijkwaardig is met een wenteling,
mits de determinant op dien matrix positief is.

Vatten wij kortelijk samen eenige vergelijkingen, die ons
in het volgende nog zullen dienen. Waren de vergelijkingen
voor de vervorming van coördinaten

$$(x' y' z') = \begin{vmatrix} \alpha & c_2 & b_1 \\ c_1 & \beta & a_2 \\ b_2 & a_1 & \gamma \end{vmatrix} (x y z), \dots\dots\dots (A)$$

dan vonden wij de negen vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (1 - \cos p) \cos^2 k_1 + \cos p, \\ \beta &= (1 - \cos p) \cos^2 k_2 + \cos p, \\ \gamma &= (1 - \cos p) \cos^2 k_3 + \cos p, \\ a_1 + a_2 &= 2 (1 - \cos p) \cos k_2 \cdot \cos k_3, \\ b_1 + b_2 &= 2 (1 - \cos p) \cos k_2 \cdot \cos k_1, \\ c_1 + c_2 &= 2 (1 - \cos p) \cos k_1 \cdot \cos k_2, \\ a_1 - a_2 &= 2 \sin p \cdot \cos k_1, \\ b_1 - b_2 &= 2 \sin p \cdot \cos k_2, \\ c_1 - c_2 &= 2 \sin p \cdot \cos k_3; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

terwijl de matrix in (A), door te stellen

$$\left. \begin{aligned} \cos p &= a, \\ \sin p \cdot \cos k_1 &= b, \\ \sin p \cdot \cos k_2 &= c, \\ \sin p \cdot \cos k_3 &= d, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

den vorm aannam, dien ik door $Q(a \ b \ c \ d)$ heb aangeduid, en waaraan ik den naam van Quaternion-Matrix heb gegeven, omdat zij werkelijk, met een bijkomenden Tensor vereenigd, van vier onderling onafhankelijke grootheden afhangt.

Deze vorm is

$$Q(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} \frac{b^2}{1+a} + a & \frac{bc}{1+a} - d & \frac{bd}{1+a} + c \\ \frac{bc}{1+a} + d & \frac{c^2}{1+a} + a & \frac{cd}{1+a} - b \\ \frac{bd}{1+a} - c & \frac{cd}{1+a} + b & \frac{d^2}{1+a} + a \end{vmatrix} \dots (3)$$

2. Het gevondene kwam dan eensdeels op het volgende neer. Door de vervorming van coördinaten, aangewezen door de vergelijkingen (A) veranderen de coördinaten (x, y, z) van een punt in (x', y', z') ; maar dezelfde verandering ondergaan zij ook, wanneer men het coördinatenstelsel in negatieven zin over een hoek p wentelt om een as, die door den oorsprong gaat, en wier positieve richting met de positieve richtingen der coördinaten-assen de hoeken k_1, k_2 en k_3 maakt respectievelijk. Voor alle juistheid zijn de coördinaten-stelsels alleen zoo gekozen, dat daarin de wenteling om de positieve X-as, van de positieve Y-as naar de positieve Z-as in positieven zin 90° bedraagt.

3. Een kleine wijziging in opvatting der vergelijkingen (A) is nu de volgende. Denkt men zich het eerste coördinaten-stelsel OXYZ als boven, maar vast, dan zal er op dit stelsel zoowel een punt P_1 aan te wijzen zijn met (x, y, z) tot coördinaten, als een punt P_2 met (x', y', z') tot coördinaten; maar men ziet ook terstond in, dat de oorsprongsvector OP_1 in den stand van den oorsprongsvector OP_2 komt door de wenteling om dezelfde as en over eenzelfde hoek als in 2 genoemd, maar in positieven zin wentelende.

Aldus opgevat krijgt de matrix $Q(a, b, c, d)$ in (3) de beteekenis van wentelaar, evenals HAMILTON die legde in zijne »eenheden" i, j en k als »quadrantal versors" of wentelaars om hoeken van 90° om drie onderling loodrechte assen van een als boven opgezet coördinaten-stelsel.

Noemen wij (x, y, z) als bepalende den oorsprongsvector $O P_1$, evenals HAMILTON \mathbf{a} en (x', y', z') evenzoo \mathbf{b} , dan geven de vergelijkingen (A) symbolisch

$$\mathbf{b} = Q(a, b, c, d) \cdot \mathbf{a}, \dots \dots \dots (4)$$

welke vergelijking dan zegt:

De oorsprongsvector \mathbf{a} komt in den stand van den oorsprongsvector \mathbf{b} door de wenteling aangeduid door $Q(a, b, c, d)$.

4. Wij komen nu gemakkelijk tot een voorstelling van de HAMILTON'sche »eenheden" i, j en k , naar diens eigen bepaling. Zoo moet i beduiden een wenteling om de x -as in positieven zin over een hoek van 90° ; daarvoor hebben wij alleen te stellen $p = 90^\circ = k_2 = k_3$ en $k_1 = 0^\circ$. Gelijkzeitig worden $a = 0, b = 1, c = 0$ en $d = 0$; dus komen wij gemakkelijk, evenzoo voor j en k besluitende, tot de symbolische vergelijkingen

$$\begin{aligned} i = Q(0, 1, 0, 0) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ j = Q(0, 0, 1, 0) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ k = Q(0, 0, 0, 1) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \dots \dots \dots (5)$$

Men kan gemakkelijk inzien, dat de negentermige symbolen in den vorm van matrices werkelijk de door i, j en k bedoelde standsveranderingen te weeg brengen.

5. Daar wij vertrouwd zijn met matrices-vermenigvuldiging vinden wij nu eerst