

**NIEUW ARCHIEF  
VOOR WISKUNDE,  
DEEL XIX**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649657896

Nieuw Archief Voor Wiskunde, Deel XIX by Wiskundig Genootschap (Netherlands )

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**WISKUNDIG GENOOTSCHAP (NETHERLANDS )**

**NIEUW ARCHIEF  
VOOR WISKUNDE,  
DEEL XIX**





NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

---

*Deel XIX.*

---

AMSTERDAM,  
W. VERSLUYS.  
1892.

△  
Sci 900.30



*Schier fund*

*Het „Nieuw Archief voor Wiskunde” wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.”*

*De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.*

LEIDEN, Juli 1891.

DE REDACTEUR,

D. BIERENS DE HAAN,

*Eerste Secretaris van het Genootschap,*

*onder de zinspreuk:*

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

## INHOUD.

	Bladz.
Vraagstuk N <sup>o</sup> . 7, opgelost door J. C. KLUYVER . . . . .	1.
Logarithmische coördinaten, door A. A. NIJLAND . . . . .	35.
Naschrift. Door A. A. NIJLAND . . . . .	65.
Vraagstuk N <sup>o</sup> . 12, opgelost door C. KREDIET . . . . .	66.
Over zelf-wederkeerige poolkrommen, door F. J. VAN DEN BERG . .	80.
Nieuw bewijs voor de stelling van Euler, bewezen voor convexe lichamen, door J. M. THIEL . . . . .	98.
Bewijs eener stelling uit de hoogere algebra, door Dr. G. J. D. MOUNIER.	100.
Een rekenkundige eigenschap der binominaal-coëfficiënten, door Dr. H. EKAMA . . . . .	105.
Het schimmel- of klok en hamerspel, door Dr. H. EKAMA . . . . .	107.
Over de meetkundige voorstelling van imaginaire punten in de ruimte, door Dr. P. MOLENBROEK . . . . .	113.
De oplossing van lineaire vector-vergelijkingen in bijzondere gevallen, door Dr. L. VAN ELFRINKHOF . . . . .	132.
Opmerkingen naar aanleiding der verhandelingen over quaternions- matrices, van den heer TH. B. WETTUM, in het Nieuw Archief voor Wiskunde, deel XVII en XVIII, door Dr. L. VAN ELFRINKHOF	143.
Over een vraagstuk, dat in de geodesie van dienst kan zijn, door F. J. VAN DEN BERG . . . . .	151
Volledige berekening van „Het Schimmel- of Klok en Hamerspel, door Dr. G. J. D. MOUNIER. . . . .	188.
<b>Kleinere mededeelingen.</b>	
De oudste rekentafels der wereld, door F. J. VAN DEN BERG . . . .	211.
De constructie van eenige stelsels der hoektransversalen in den vlak- ken driehoek, door P. I. HELWIG J.Az. . . . .	216.





## VRAAGSTUK N<sup>o</sup>. 7.

OPGELOST DOOR

**J. C. KLUYVER.**

Over het complex der rechte lijnen, gelegen op de oppervlakken van den tweeden graad, gaande door zeven willekeurig gegeven punten.

---

Door iedere overeenkomst, punt voor punt of vlak voor vlak, die er tusschen twee ruimtestelsels bestaat, is een complex bepaald. Namelijk zullen in het eerste geval de verbindingslijnen der toegevoegde punten, in het tweede geval de snijlijnen der toegevoegde vlakken, in het algemeen een drievoudig oneindig stralenstelsel of complex vormen. De complexen, die op deze wijze ontstaan, maken eene afzonderlijke groep uit; daartoe moet ook het hier te beschouwen complex  $K$  worden gerekend, en het is wenschelijk, dit maar onmiddellijk aan te toonen.

Alle oppervlakken van den tweeden graad, door zeven willekeurige punten gebracht, vormen een net en hebben een achtste punt gemeen. Door middel van dit net is er eene involutorische overeenkomst tusschen de punten der ruimte tot stand gekomen; want aan elk punt  $A$  is ten opzichte van alle netoppervlakken een tweede punt  $A'$  harmonisch toegevoegd.

Wanneer wij op de lijn  $AA'$  twee willekeurige punten  $C$  en  $D$  aannemen, dan moet het netoppervlak  $F^2$ , dat door

C en D gaat, de geheele lijn  $AA'$  bevatten, omdat anders A en A' ten opzichte van  $F^2$  niet harmonisch zouden liggen. Elke verbindingslijn  $AA'$  is derhalve straal van het complex  $K$ . Omgekeerd is een straal  $l$  van  $K$  drager van een puntenpaar  $A, A'$ . Immers als  $l$  op het netoppervlak  $F^2$  ligt, bevat die lijn altijd een paar punten, die harmonisch zijn toegevoegd met betrekking tot twee andere netoppervlakken. Buitendien bezitten die punten blijkbaar dezelfde eigenschap ten opzichte van  $F^2$ , dus zijn het toegevoegde punten van het net. Te verwachten is het derhalve, dat de eigenschappen van het complex  $K$  ten nauwste zullen samenhangen met de theorie van het oppervlakkennet en van de daaruit voortvloeiende involutorische overeenkomst. Wij geven daarom vooraf eene korte opsomming van die eigenschappen van het oppervlakkennet, welke bij het verder onderzoek aanhoudend worden toegepast. Daarna nemen wij als uitgangspunt van onze beschouwingen de constructie van den complexkegel en van de complexkromme, waarbij wij nagaan, onder welke omstandigheden deze figuren buitengewone singulariteiten verkrijgen. Als vanzelf worden dan tegelijkertijd eenige van de eenvoudigste eigenschappen van het singuliere oppervlak  $S$  en van het complexvlak  $V$  opgespoord. Eenige opmerkingen omtrent den bundel van ruimtekrommen  $R^3$  (onderlinge doorsnijdingen der netoppervlakken), in verband met de buigvlakken der complexkegels en de keerpunten der complexkrommen, zullen het onderzoek van het algemeene complex  $K$  besluiten. Eindelijk zullen wij nog even stil staan bij de wijzigingen, die het complex  $K$  door bijzondere ligging der zeven gegeven punten ondergaat. Vergelijking van de uitkomsten, die wij zullen vinden, met die, welke in zoo grooten getale door Voss in zijne beroemde verhandeling over het straalalgemeen complex <sup>1)</sup> zijn afgeleid, zal doen blijken, hoe  $K$  als een bijzonder complex moet worden beschouwd, hetwelk het dualistisch karakter, kenmerk van het straalalgemeen complex, bijna geheel verloren heeft.

1) „Ueber Complexe und Congruenzen“, *Math. Annalen*, Bd. 9, bl. 55. Men vergelijkte ook: Schur, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 36, „Singularitäten des allgemeinen Stralcomplexes.“

1. *Het net van oppervlakken van den tweeden graad* <sup>1)</sup>. Alle oppervlakken  $F^2$  door zeven punten  $H_1, H_2, \dots, H_7$  gaande, hebben nog een punt  $H_8$  gemeen; zij heeten gezamenlijk de »basispunten van het net». Iedere verbindingslijn van twee basispunten, die wij »knooplijn» zullen noemen, is volgens eene bekende stelling van HESSE koorde van de ruimtekromme van den derden graad  $Q^3$ , welke door de zes overige basispunten gaat; zoo is de lijn  $H_1 H_2$  koorde van  $Q_{1,2}^3$ , en zoo voort. Daarop berust de constructie van het achtste basispunt, als de eerste zeven gegeven zijn <sup>2)</sup>. Door een aangenomen

1) Men vergelijke: REYE, *Geometrie der Lage*, II, blz. 229, STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, blz. 28, SCHWÖBER, *Theorie der Raumkurve 4ter Ordnung 1ster Species*.

2) Theoretisch althans is de constructie van het achtste basispunt, die op de genoemde stelling van HESSE berust, de eenvoudigste. Werkelijk uitvoerbaar evenwel is zij niet. Men kent andere lineaire constructies, die hoewel vrij omslachtig, toch uitvoerbaar zijn. In *Crelle's Journal*, Bd. 99 en 190, vindt men er niet minder dan zes. De eerste van CASPARY berust op de volgende, van HESSE afkomstige, eigenschap der acht »geassocieerde» punten 1, 2, 3, ..., 8: Beschouwt men den scheeven zeshoek 1 2 3 4 5 6, dan kan men een ingeschreven zeshoek van BLANCHON  $\mathcal{V}$  construeeren, welks hoofddiagonalen elkaar in 7 snijden, en waarvan de overstaande hoekpunten op de overstaande zijden van den eersten zeshoek zijn gelegen. Construeert men met behulp van het punt 8 een tweeden dergelyken ingeschreven zeshoek  $\mathcal{V}'$ , dan liggen de zijden van  $\mathcal{V}$  en  $\mathcal{V}'$  op eene hyperboloïde.

Bij eene tweede constructie van SCHAFFER wordt gebruik gemaakt van de stelling van HESSE, die aangeeft, dat 1, 2, 3, 4 en 5, 6, 7, 8 hoekpunten zijn van twee poolviervlakken van hetzelfde polaire ruimtestelsel.

PICQUET onderzoekt het verband tusschen acht geassocieerde punten, uitgaande van de stelling, dat alle oppervlakken van den tweeden graad, die door vijf gegeven punten gaan, door een willekeurig vlak worden gesneden volgens kegelsneden, die eene vaste kegelsnede in het vlak harmonisch omschreven zijn.

STURM projecteert uit 1 en 2 vooreerst de punten 3, 4, 5, 6, 7 op een willekeurig vlak. De twee vijftallen van projecties komen met elkaar overeen, en in die overeenkomst hebben de beide projecties van 8 eene eigenaardige betekenis, die veroorlooft ze te construeeren.

ZETTLER geeft eene constructie, berustende op de volgende eigenschap: Indien men de punten 2, 3, 5, 6, 7 en de lijnen 12 en 34 als gegeven beschouwt, gaat het vlak 148 door een vast punt van het vlak 567.

REYE construeert ten laatste het punt 8 door er van gebruik te maken, dat twee willekeurige punten steeds met acht geassocieerde punten op een oppervlak van den tweeden graad liggen.

Ten slotte vindt men in de *Acta Mathematica*, 12: 3 en 4, eene verhandeling van DOBRNER, waarin gewezen wordt op de analogie tusschen de eigenschappen der acht basispunten en die van zes punten op eene kegelsnede. Ter zelfder plaats