NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, DEEL XIX

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649657896

Nieuw Archief Voor Wiskunde, Deel XIX by Wiskundig Genootschap (Netherlands)

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

WISKUNDIG GENOOTSCHAP (NETHERLANDS)

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, DEEL XIX

Trieste

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

Deel XIX.

AMSTERDAM,
W. VERSLUYS.
1892.

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde" *wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam*, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

De Redacteur,

Leiden, Juli 1891. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,

onder de zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

Kleinere mededeelingen.

VRAAGSTUK N°. 7.

OPGELOST DOOR

J. C. KLUYVER.

Over het complex der rechte lijnen, gelegen op de oppervlakken van den tweeden graad, gaande door zeven willekeurig gegeven punten.

Door iedere overeenkomst, punt voor punt of vlak voor vlak, die er tusschen twee ruimtestelsels bestaat, is een complex bepaald. Namelijk zullen in het eerste geval de verbindingslijnen der toegevoegde punten, in het tweede geval de snijlijnen der toegevoegde vlakken, in het algemeen een drievoudig oneindig stralenstelsel of complex vormen. De complexen, die op deze wijze ontstaan, maken eene afzonderlijke groep uit; daartoe moet ook het hier te beschouwen complex K worden gerekend, en het is wenschelijk, dit maar onmiddellijk aan te toonen.

Alle oppervlakken van den tweeden graad, door zeven willekeurige punten gebracht, vormen een net en hebben een achtste punt gemeen. Door middel van dit net is er eene involutorische overeenkomst tusschen de punten der ruimte tot stand gekomen; want aan elk punt A is ten opzichte van alle netoppervlakken een tweede punt A′ harmonisch toegevoegd.

Wanneer wij op de lijn A A′ twee willekeurige punten C en D aannemen, dan moet het netoppervlak F^2, dat door

C en D gaat, de geheele lijn A A′ bevatten, omdat anders A en A′ ten opzichte van F^2 niet harmonisch zouden liggen. Elke verbindingslijn A A′ is derhalve straal van het complex K. Omgekeerd is een straal l van K drager van een puntenpaar A, A′. Immers als l op het netoppervlak F^2 ligt, bevat die lijn altijd een paar punten, die harmonisch zijn toegevoegd met betrekking tot twee andere netoppervlakken. Buitendien bezitten die punten blijkbaar dezelfde eigenschap ten opzichte van F^2, dus zijn het toegevoegde punten van het net. Te verwachten is het derhalve, dat de eigenschappen van het complex K ten nauwste zullen samenhangen met de theorie van het oppervlakkennet en van de daaruit voortvloeiende involutorische overeenkomst. Wij geven daarom vooraf eene korte opsomming van die eigenschappen van het oppervlakkennet, welke bij het verder onderzoek aanhoudend worden toegepast. Daarna nemen wij als uitgangspunt van onze beschouwingen de constructie van den complexkegel en van de complexkromme, waarbij wij nagaan, onder welke omstandigheden deze figuren buitengewone singulariteiten verkrijgen. Als vanzelf worden dan tegelijkertijd eenige van de eenvoudigste eigenschappen van het singuliere oppervlak S en van het complexvlak V opgespoord. Eenige opmerkingen omtrent den bundel van ruimtekrommen R^4 (onderlinge doorsnijdingen der netoppervlakken), in verband met de buigvlakken der complexkegels en de keerpunten der complexkrommen, zullen het onderzoek van het algemeene complex K besluiten. Eindelijk zullen wij nog even stil staan bij de wijzigingen, die het complex K door bijzondere ligging der zeven gegeven punten ondergaat. Vergelijking van de uitkomsten, die wij zullen vinden, met die, welke in zoo grooten getale door Voss in zijne beroemde verhandeling over het straalalgemeen complex [1]) zijn afgeleid, zal doen blijken, hoe K als een bijzonder complex moet worden beschouwd, hetwelk het dualistisch karakter, kenmerk van het straalalgemeen complex, bijna geheel verloren heeft.

---

1) „Ueber Complexe und Congruenzen", *Math. Annalen*, Bd. 9, bl. 55. Men vergelijke ook: Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 36, „Singularitäten des allgemeinen Stralencomplexes."

1. *Het net van oppervlakken van den tweeden graad* [1]). Alle oppervlakken F^2 door zeven punten $H_1, H_2, \ldots H_7$ gaande, hebben nog een punt H_8 gemeen; zij heeten gezamenlijk de »basispunten van het net". Iedere verbindingslijn van twee basispunten, die wij »knooplijn" zullen noemen, is volgens eene bekende stelling van HESSE koorde van de ruimtekromme van den derden graad Q^3, welke door de zes overige basispunten gaat; zoo is de lijn H_1 H_2 koorde van Q^3_{12}, en zoo voort. Daarop berust de constructie van het achtste basispunt, als de eerste zeven gegeven zijn [2]). Door een aangenomen

---

1) Men vergelijke: REYE, *Geometrie der Lage*, II, blz. 229, STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, blz. 28, SCHRÖTER, *Theorie der Raumkurve 4ter Ordnung 1ster Species*.

2) Theoretisch althans is de constructie van het achtste basispunt, die op de genoemde stelling van HESSE berust, de eenvoudigste. Werkelijk uitvoerbaar evenwel is zij niet. Men kent andere lineaire constructies, die hoewel vrij omslachtig, toch uitvoerbaar zijn. In *Crelle's Journal*, Bd. 99 en 100, vindt men er niet minder dan zes. De eerste van CASPARY berust op de volgende, van HESSE afkomstige, eigenschap der acht „geassocieerde" punten 1, 2, 3, ... 8: Beschouwt men den scheeven zeshoek 1 2 3 4 5 6, dan kan men een ingeschreven zeshoek van BRIANCHON V construeeren, welks hoofddiagonalen elkaar in 7 snijden, en waarvan de overstaande hoekpunten op de overstaande zijden van den eersten zeshoek zijn gelegen. Construeert men met behulp van het punt 8 een tweeden dergelijken ingeschreven zeshoek V', dan liggen de zijden van V en V' op eene hyperboloïde.

Bij eene tweede constructie van SCHRÖTER wordt gebruik gemaakt van de stelling van HESSE, die aangeeft, dat 1, 2, 3, 4 en 5, 6, 7, 8 hoekpunten zijn van twee poolviervlakken van hetzelfde polaire ruimtestelsel,

PICQUET onderzoekt het verband tusschen acht geassocieerde punten, uitgaande van de stelling, dat alle oppervlakken van den tweeden graad, die door vijf gegeven punten gaan, door een willekeurig vlak worden gesneden volgens kegelsneden, die eene vaste kegelsnede in het vlak harmonisch omschreven zijn.

STURM projecteert uit 1 en 2 vooreerst de punten 3, 4, 5, 6, 7 op een willekeurig vlak. De twee vijftallen van projecties komen met elkaar overeen, en in die overeenkomst hebben de beide projecties van 8 eene eigenaardige beteekenis, die veroorlooft ze te construeeren.

ZEUTHEN geeft eene constructie, berustende op de volgende eigenschap: Indien men de punten 2, 3, 5, 6, 7 en de lijnen 12 en 34 als gegeven beschouwt, gaat het vlak 148 door een vast punt van het vlak 567.

REYE construeert ten laatste het punt 8 door er van gebruik te maken, dat twee willekeurige punten steeds met acht geassocieerde punten op een oppervlak van den tweeden graad liggen.

Ten slotte vindt men in de *Acta Mathematica*, 12: 3 en 4, eene verhandeling van DOBRINER, waarin gewezen wordt op de analogie tusschen de eigenschappen der acht basispunten en die van zes punten op eene kegelsnee. Ter zelfder plaatse