FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN. ERSTEN BANDES ZWEITES HEFT: EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649171880

Funktionentheoretische Vorlesungen. Ersten Bandes zweites Heft: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen by Heinrich Burkhardt

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

HEINRICH BURKHARDT

FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN. ERSTEN BANDES ZWEITES HEFT: EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

Trieste

FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN.

Von

Dr. HEINRICH BURKHARDT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH.

ERSTEN BANDES ZWEITES HEFT.

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN.

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1903

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE

DER

ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN.

Von

Dr. HEINRICH BURKHARDT,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH.

ZWEITE, DURCHGESEHENE UND TEILWEISE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG

VERLAG VON VEIT & COMP.

1903

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die zahlreich vorhandenen deutschen funktionentheoretischen Lehrbücher berücksichtigen fast alle[1] einseitig entweder nur WEIERSTRASSsche oder nur RIEMANNsche Funktionentheorie. Neuere französische und englische Lehrbücher (PICARD, FORSYTH, HARKNESS und MORLEY) sind seit Jahren bemüht, die Kluft zwischen beiden Methoden zu überbrücken; auch bei uns sind die Vorlesungen wie die wissenschaftliche Arbeit selbst nachgerade wohl überall über sie hinausgewachsen; aber es fehlt noch an einem unseren deutschen Unterrichtsverhältnissen angepaßten Buch von mäßigem Umfang, das geeignet wäre, den Studenten von Anfang an den Zugang zu beiden Gedankenkreisen zu eröffnen. Das Fehlen eines solchen Buches machte sich mir lebhaft fühlbar, als ich auf Aufforderung der Verlagsbuchhandlung ein kurzes Lehrbuch der elliptischen Funktionen zu schreiben unternahm; ich habe mich daher entschlossen, ihm diese Einführung in die Funktionentheorie vorauszuschicken. Die RIEMANNschen geometrischen Vorstellungsweisen sind in ihm durchweg in den Vordergrund gestellt; dabei wird aber versucht, unter angemessener Einschränkung der Voraussetzungen diejenige Schärfe der Beweisführung zu erreichen, die niemand mehr entbehren kann, dem einmal in der Schule von WEIERSTRASS die Augen geöffnet sind.

Die verbreiteten Darstellungen der RIEMANNschen Funktionentheorie geben im wesentlichen eine Vorbereitung auf RIEMANNS Theorie der Integrale algebraischer Funktionen. Das war ganz sachgemäß, solange diese Theorie der einzige zur Ausführung gelangte Teil von RIEMANNS funktionentheoretischen Entwürfen war. Inzwischen ist das anders geworden: durch die Arbeiten von POINCARÉ und KLEIN sind die linearen Differentialgleichungen und

[1] Soviel mir bekannt, macht nur HARNACKS Grundriß der Differential- und Integralrechnung eine Ausnahme; aber der kann Anfängern nicht wohl empfohlen werden.

die automorphen Funktionen in den Vordergrund getreten. Auch ein elementares Lehrbuch wird dieser Verschiebung des Schwerpunktes Rechnung tragen müssen; der Begriff des *Fundamentalbereiches* mit allem was daran hängt wird nicht mehr in ihm fehlen dürfen, sondern an den ja durchaus den Elementen angehörenden einfachsten Beispielen, wie z^n und e^z, ausführlich exponiert werden müssen. Soll dafür Platz werden, so muß ein Teil des herkömmlichen Stoffes fallen; ich habe geglaubt, am ehesten die allgemeine Analysis Situs der endlichblättrigen RIEMANNschen Flächen opfern zu können.

Was die Disposition des Stoffes im einzelnen angeht, so ist sie im allgemeinen aus dem beigegebenen Inhaltsverzeichnis ersichtlich; im einzelnen darf ich vielleicht folgendes erwähnen.

Im *ersten* Abschnitt habe ich das Rechnen mit komplexen Zahlen als ein Rechnen mit Zahlenpaaren eingeführt, dabei mich aber auf eine allgemeine Theorie der Zahlensysteme mit zwei (oder gar mit mehr) Einheiten nicht eingelassen, sondern gleich die für die Theorie der „gemeinen komplexen Zahlen" charakteristischen Voraussetzungen apodiktisch hingestellt.

Der *zweite* Abschnitt enthält zunächst eine ausführliche geometrische Theorie der elementaren rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der durch sie vermittelten konformen Abbildungen. Der Übergang von der Ebene zur Kugel durch stereographische Projektion wird zeitig vorgenommen und dann im folgenden überall wo es zweckmäßig schien wieder benutzt. Den Schluß des Abschnittes bildet, statt irgend eines an und für sich gleichgültigen Beispieles einer rationalen Funktionen allgemeineren Charakters, die Diskussion der symmetrischen Invariante von vier Punkten als Funktion ihres Doppelverhältnisses.

Der *vierte* Abschnitt bringt die Lehre von den eindeutigen Funktionen komplexen Argumentes im wesentlichen im Anschluß an CAUCHY und RIEMANN. Nach Ableitung der Eigenschaften solcher Funktionen in Bereichen, in denen sie sich regulär verhalten, schalte ich zunächst die spezielle Diskussion der Exponentialfunktionen, sowie des Sinus und Cosinus ein. Erst dann folgt die Lehre von den isolierten singulären Punkten, in Verbindung mit dem LAURENTschen Satze, an den ich auch gleich die FOURIERsche Reihe anschließe. Bei der Behandlung des MITTAG-LEFFLERschen Satzes beschränke ich mich auf den einfachen Fall, in welchem man nicht nötig hat, die Grade der Zusatzpolynome ins Unendliche wachsen zu lassen. Anwendungen dieses Satzes auf einfach periodische Funktionen schließen den Abschnitt.

Im *fünften* Abschnitt, der von mehrdeutigen Funktionen handelt, habe ich eine Änderung der herkömmlichen Anordnung gewagt, die vielleicht nur geteilter Zustimmung begegnen wird: ich habe den Logarithmus und die zugehörige unendlichblättrige RIEMANNsche Fläche vorangestellt und seine Eigenschaften dann bei der Untersuchung auch der einfachsten Irrationalitäten ohne Scheu benutzt. Gewiß kann man diese Untersuchung führen, ohne irgend welche transzendente Hilfsmittel zu benutzen; will man aber dann konsequent sein, so muß man auch die trigonometrische Form einer komplexen Zahl vermeiden, die doch nichts anderes ist als die Einführung ihres Logarithmus, und die Existenz der n^{ten} Wurzeln komplexer Zahlen mit dem Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Für ein Elementarbuch schien mir das zu umständlich zu sein. Übrigens wird in diesem Abschnitt die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen ganz beiseite gelassen; dafür sind die einfachsten Fälle um so ausführlicher diskutiert. Zum Schluß des Abschnittes werden die Eigenschaften des Logarithmus benutzt, um die Darstellung einer ganzen transzendenten Funktion durch ein unendliches Produkt aus der Partialbruchzerlegung ihrer logarithmischen Ableitung zu gewinnen.

Den *sechsten* und letzten Abschnitt habe ich „allgemeine Funktionentheorie“ genannt. Erst in ihm entwickle ich die allgemeinen Begriffe der analytischen Fortsetzung, der analytischen Funktion, der RIEMANNschen Fläche, der natürlichen Grenze. Außerdem enthält der Abschnitt noch eine Darstellung des Spiegelungsprinzips.

Eine Angabe der ersten Quelle der angeführten Definitionen und Sätze habe ich unterlassen zu dürfen geglaubt. An einzelnen Stellen habe ich Hinweise auf die Literatur für solche Leser beigefügt, die eine oder die andere Frage weiter zu verfolgen wünschen, als es im Text geschehen könnte; auch dabei habe ich nicht stets die erste Quelle genannt, sondern womöglich auf solche Darstellungen verwiesen, die mir für den Anfänger geeignet zu sein schienen.

Schließlich ist es mir eine angenehme Pflicht, meinen Göttinger Lehrern und Freunden für das fördernde Interesse zu danken, mit dem sie die Entstehung des Büchleins begleitet haben.

Ansbach, den 26. März 1897.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Da die beiden ersten, sowie die drei letzten Abschnitte, außer in den Kreisen der WEIERSTRASS-Schüler strenger Observanz, Beifall gefunden haben, habe ich in diesen Kapiteln zu wesentlichen Veränderungen keine Veranlassung gesehen. Nur habe ich den Beweis des CAUCHYschen Fundamentaltheorems in der einfachen Form gegeben, die durch die Untersuchungen der Herren PRINGSHEIM, GOURSAT und MOORE ermöglicht ist; das brachte noch einige andere Änderungen und Umstellungen mit sich. Außerdem hoffe ich an einigen Stellen durch kleine Zusätze das Verständnis erleichtert zu haben.

Dagegen ist der dritte Abschnitt ganz umgearbeitet: für die elementaren Dinge ist auf meine inzwischen als I. 1 dieser Vorlesungen erschienene algebraische Analysis verwiesen, einige weitere Sätze, die dort nicht an ihrem Platze gewesen wären, aber hier gebraucht werden, erscheinen jetzt mit Beweisen versehen. Da für den Beweis des CAUCHYschen Satzes der Begriff des Doppelintegrals nicht mehr erforderlich ist, konnte die dadurch bedingte Vermehrung des Raumes in mäßigen Grenzen gehalten werden.

Herrn J. GRAND bin ich für Beihilfe bei der Korrektur Dank schuldig.

Zürich, den 12. Oktober 1903.

H. Burkhardt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Komplexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung.

§		Seite
1.	Rückblick auf die allgemeine Arithmetik der reellen Zahlen	1
2.	Einführung von Zahlenpaaren; ihre Addition und Subtraktion . . .	2
3.	Multiplikation der Zahlenpaare; die Zahlenpaare als komplexe Zahlen	6
4.	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte der Ebene	10
5.	Geometrische Darstellung der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	13
6.	Geometrische Darstellung der Multiplikation komplexer Zahlen . . .	15
7.	Division komplexer Zahlen	16

Zweiter Abschnitt.

Die rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten konformen Abbildungen.

§		Seite
8.	Allgemeine Vorbemerkungen; die Funktion $z + a$ und die Parallelverschiebung	18
9.	Die Funktion az	20
10.	Die lineare ganze Funktion und die allgemeine Ähnlichkeitstransformation	21
11.	Die Funktion $1/z$ und die Transformation durch reziproke Radien .	25
12.	Die Division durch Null; der Wert unendlich einer komplexen Variabeln	29
13.	Übergang von der Ebene zur Kugel durch stereographische Projektion	31
14.	Die allgemeine lineare gebrochene Funktion und die Kreisverwandtschaft	36
15.	Das Doppelverhältnis als Invariante gegenüber linearer Transformation	42
16.	Deutung der linearen Transformationen auf der Kugel; zugehörige Kollineationen des Raumes	49
17.	Die Funktion z^2	53