

**LEÇONS SUR LES  
FONCTIONS DE  
LIGNES, PROFESSÉES À  
LA SORBONNE EN 1912**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649176823

Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1912 by Vito Volterra

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**VITO VOLTERRA**

**LEÇONS SUR LES  
FONCTIONS DE  
LIGNES, PROFESSÉES À  
LA SORBONNE EN 1912**



570<sup>4</sup>  
LEÇONS

sur les

**FONCTIONS DE LIGNES**

A LA MÊME LIBRAIRIE.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL,  
 PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS À L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

|   |                         |
|---|-------------------------|
| Leçons sur la théorie des fonctions ( <i>Éléments de la théorie des ensembles et applications</i> ), par ÉMILE BOREL; 1898.....   | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL; 1900.....   | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les séries divergentes, par ÉMILE BOREL; 1901.....   | 4 fr. 50                |
| Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par R. d'Adhémar; 1902.....  | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par Ludovico Zaretti; 1903.....   | 3 fr. 50                |
| Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1904.....  | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, professées à l'École Normale par ÉMILE BOREL, rédigées par Maurice Fréchet, avec des Notes de PAUL PAINLEVÉ et de HENRI LEBESGUE; 1905..... | 4 fr. 50                |
| Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par RENE BAIRE, rédigées par A. Denjoy; 1906.....  | 3 fr. 50                |
| Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1906.....   | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1906.....   | 3 fr. 50                |
| Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX, avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908.....  | 6 fr. 50                |
| Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par UTO BLUMENTHAL; 1910.....  | 5 fr. 50                |
| Leçons sur la théorie de la croissance, par EMIL BANKI, rédigées par A. Denjoy; 1910.....   | 5 fr. 50                |
| Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe, par PAUL MONTÉL; 1910.....  | 3 fr. 50                |
| Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France par LUDOVICO ZARETTI; 1910.....  | 3 fr. 75                |
| Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, par F. DIKENS; 1913.....   | 5 fr. 50                |
| Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrodifférentielles, professées à l'Université de Rome en 1910, par VITO VOLTKANA, rédigées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti; 1913.....                                      | 5 fr. 50                |
| Les Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par FREDERICH RIESZ.....   | ( <i>Sous presse.</i> ) |
| Leçons sur les séries de facultés, par N. E. NÖRLUND.....   | ( <i>Sous presse.</i> ) |

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS  
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

## LEÇONS

SUR LES

# FONCTIONS DE LIGNES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1912.

PAR

**VITO VOLTERRA.**

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE,  
PROFESSEUR AGRÉGÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

Par **Joseph PÉRÈS,**

AGRÉGÉ GÈRE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS,

**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**

DE BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

QA  
320  
V6

615738  
2.8.55

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.



---

## PRÉFACE.

---

J'ai eu le grand honneur de professer ces Leçons à la Sorbonne, de janvier à mars 1912, en qualité de professeur agrégé à l'Université de Paris (fondation Albert Kahn). J'exprime à M. le Vice-Recteur, à M. le Doyen de la Faculté des Sciences et aux membres du Conseil de l'Université de Paris toute ma reconnaissance pour la flatteuse invitation qu'ils ont bien voulu me faire d'exposer les résultats de mes recherches.

Ces Leçons ont été recueillies avec le plus grand soin par un jeune géomètre de beaucoup de mérite, M. Joseph Pérès. Dans la rédaction et dans la correction des épreuves, il a montré une intelligence et un zèle dont je lui exprime mes plus vifs remerciements.

Je suis heureux de faire paraître ces Leçons dans la *Collection de monographies sur la Théorie des fonctions*, dirigée par M. Émile Borel. Ce nouveau Volume complète celui qui a paru il y a quelques mois dans la même collection sous le titre : *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales-différentielles*.

Je vois avec le plus grand plaisir que les théories exposées dans le présent Ouvrage sont en train de se développer. De nouveaux travaux ont paru pendant son impression, d'autres vont paraître qui s'y rattachent. J'aurais désiré les exposer ou les citer tous. Mais je n'ai pas pu le faire, soit pour ne pas

altérer le plan de mon cours, soit parce que je n'en ai eu connaissance que trop tard. C'est ainsi que je regrette de n'avoir pas pu m'occuper des récents et beaux travaux de M. Paul Lévy sur les équations aux dérivées fonctionnelles, ni des intéressantes recherches de M. Fréchet sur les fondements de la théorie des fonctions de lignes et sur quelques formes nouvelles de leurs développements en série, ni d'autres travaux encore.

Je n'ai pas séparé dans cet Ouvrage la partie d'analyse pure de celle des applications. Il aurait été plus systématique de les exposer l'une après l'autre, mais de cette manière je n'aurais pas suivi la marche de mes pensées et je me serais éloigné de l'esprit de mes travaux. J'ai dû laisser de côté les applications des fonctions de lignes et d'hyperespaces aux intégrales des fonctions de plusieurs variables et à l'extension des fonctions conjuguées, car dans le plan de mes recherches elles forment des branches distinctes de celles dont on trouvera un aperçu d'ensemble dans ces Leçons.

Rome, juillet 1913.

VITO VOLTERRA.

---

# LEÇONS

SUR LES

## FONCTIONS DE LIGNES

---

### CHAPITRE I.

#### L'ÉVOLUTION DES IDÉES FONDAMENTALES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

1. Les méthodes infinitésimales. — 2. Eudoxe de Cnide et Archimède. — 3. Galilée, Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat, Torricelli, Pascal, Wallis. — 4. Huygens, Neper, Mercator, Roberval, Barrow, Newton, Leibniz. — 5. Extension des opérations du calcul infinitésimal. — 6. Calcul différentiel et intégral des substitutions. — 7. Concept de fonction. — 8. Passage du fini à l'infini dans le concept de fonction. — 9. Problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne. — 10. Différents types d'évolution et différentes sortes d'analyses.
- 

1. Avant d'aborder l'exposé des méthodes d'analyse et le développement des questions de détail se rapportant au sujet que je vais traiter, je consacrerai ce Chapitre à donner un aperçu du sujet en général, en le reliant à des principes très connus en Mathématiques et à des questions qui se posent dans la Philosophie naturelle. Ainsi on pourra mettre à leur place naturelle des méthodes qui se sont développées dans ces dernières années et montrer leur situation dans l'histoire générale des idées mathématiques. Peut-être pourra-t-on aussi juger de leur avenir.

Je commencerai par remarquer l'existence d'un sentiment que tous les géomètres éprouvent, bien qu'ils ne s'en rendent pas compte à tout instant. C'est au moment où l'on craint de perdre un objet qu'on l'aime et l'apprécie à sa juste valeur. Dans une Note récente, M. Poincaré, en étudiant la question des *quanta*, montre qu'il n'est pas possible de se passer de l'hypothèse que