ALLGEMEINE FLÄCHENTHEORIE: (DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS)

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649765799

Allgemeine Flächentheorie: (Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas) by Carl Friedrich Gauss & A. Wangerin

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

CARL FRIEDRICH GAUSS & A. WANGERIN

ALLGEMEINE FLÄCHENTHEORIE: (DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS)

Trieste

Allgemeine

FLÄCHENTHEORIE

(Disquisitiones generales circa superficies curvas)

von

CARL FRIEDRICH GAUSS

(1827).

Deutsch herausgegeben

von

A. Wangerin.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1889.

Allgemeine Flächentheorie

(Disquisitiones generales circa superficies curvas)

von

Carl Friedrich Gauss.

Aus »Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI ad a. 1823—1827.« Göttingen 1828.

1.

[**99**] Untersuchungen, bei denen eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt, lassen sich häufig übersichtlicher und einfacher darstellen, wenn man eine Kugelfläche zu Hülfe nimmt, die mit einem Radius = 1 um einen willkürlich angenommenen Mittelpunkt beschrieben ist; die verschiedenen Richtungen werden dann durch diejenigen Punkte auf der Oberfläche dieser Hülfskugel dargestellt, welche die Endpunkte der mit ihnen parallel gezogenen Radien sind. Wird die Lage eines Punktes im Raum durch drei Coordinaten bestimmt, d. i. durch seine Abstände von drei festen, auf einander senkrechten Ebenen, so sind vor allem die Richtungen der zu jenen Ebenen senkrechten Axen ins Auge zu fassen; die Punkte der Kugelfläche, welche diese Axenrichtungen darstellen, sollen mit 1, 2, 3 bezeichnet werden; ihr gegenseitiger Abstand beträgt 90 Grad. Uebrigens sind dabei unter den Axenrichtungen diejenigen Richtungen zu verstehen, nach denen hin die entsprechenden Coordinaten wachsen.

2.

[**100**] Es wird zweckmässig sein, einige Sätze, die bei der folgenden Untersuchung häufige Anwendung finden, hier im Zusammenhang vorzuführen.

I. Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden wird gemessen durch den Bogen zwischen denjenigen Punkten, welche auf der Kugelfläche den Richtungen jener Geraden entsprechen.

II. Die Stellung einer beliebigen Ebene kann durch einen grössten Kugelkreis dargestellt werden, dessen Ebene jener ersten parallel ist.

III. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den beiden grössten Kugelkreisen, durch welche jene dargestellt werden; der in Rede stehende Winkel wird daher auch durch den zwischen den Polen der beiden grössten Kugelkreise liegenden Bogen gemessen. Gleicherweise wird der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene durch den Bogen gemessen, der von dem der Richtung der Geraden entsprechenden Punkte der Kugelfläche ausgeht und auf dem grössten Kreise, der die Stellung der Ebene darstellt, senkrecht steht.

IV. Bezeichnen x, y, z; x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte, r ihren Abstand; ist ferner L der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung der von dem ersten jener Punkte zum zweiten gezogenen Geraden darstellt, so wird

$$\begin{aligned} x' &= x + r\cos 1L, \\ y' &= y + r\cos 2L, \\ z' &= z + r\cos 3L. \end{aligned}$$

V. Daraus folgt unmittelbar, dass allgemein

$$\cos^2 1L + \cos^2 2L + \cos^2 3L = 1$$

wird, dass ferner, wenn L' irgend einen andern Punkt der Kugelfläche bezeichnet,

$$\cos 1L \,.\, \cos 1L' + \cos 2L \,.\, \cos 2L' + \cos 3L \,.\, \cos 3L' = \cos LL'$$

ist.

VI. Lehrsatz. Bezeichnen L, L', L'', L''' vier auf der Kugel liegende Punkte und bezeichnet A den Winkel, welchen die Bogen LL', $L''L'''$, bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert, bilden, so ist

$$\begin{aligned} &\cos LL'' \,.\, \cos L'L''' - \cos LL''' \,.\, \cos L'L'' \\ &= \sin LL' \,.\, \sin L''L''' \,.\, \cos A. \end{aligned}$$

[101] Beweis. Der Schnittpunkt von LL' und $L''L'''$ möge ebenfalls mit A bezeichnet werden; ferner sei

$$AL = t,\ AL' = t',\ AL'' = t'',\ AL''' = t'''.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t \ \cos t'' + \sin t \ \sin t'' \ \cos A,\\
\cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A,\\
\cos LL''' &= \cos t \ \cos t''' + \sin t \ \sin t''' \cos A,\\
\cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \ \cos A;
\end{aligned}
$$

folglich

$$
\begin{aligned}
&\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L''\\
&= \cos A\,[\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t''\\
&\qquad - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''']\\
&= \cos A\,(\cos t \sin t' - \sin t \cos t')\,(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''')\\
&= \cos A \,.\, \sin (t' - t) \,.\, \sin (t''' - t'')\\
&= \cos A \,.\, \sin LL' . \ \sin L''L'''.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist noch Folgendes zu beachten. Vom Punkte A gehen je zwei Zweige der beiden grössten Kreise aus, und dieselben bilden dort zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen; von diesen Zweigen sind, wie aus unserer Ableitung hervorgeht, diejenigen zu nehmen, deren Richtungen mit der Richtung des Fortschreitens vom Punkte L nach L' und vom Punkte L'' nach L''' übereinstimmen. Daraus erkennt man zugleich, dass es gleichgültig ist, welchen der beiden Schnittpunkte der grössten Kreise man ausgewählt hat. An Stelle des Winkels A kann auch der Bogen zwischen den Polen der grössten Kreise, von denen LL' und $L''L'''$ Theile bilden, gesetzt werden: offenbar aber muss man diejenigen Pole nehmen, die in Bezug auf diese Bogen gleiche Lage haben, nämlich beide Pole zur Rechten, wenn man von L nach L' und von L'' nach L''' hin fortschreitet, oder beide zur Linken.

VII. Es seien L, L', L'' drei Punkte der Kugelfläche, und es werde zur Abkürzung gesetzt

$$
\begin{aligned}
&\cos 1L = x, \quad \cos 2L = y, \quad \cos 3L = z,\\
&\cos 1L' = x', \quad \cos 2L' = y', \quad \cos 3L' = z',\\
&\cos 1L'' = x'', \quad \cos 2L'' = y'', \quad \cos 3L'' = z'',
\end{aligned}
$$

[102] ferner

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \triangle.$$

λ möge den Pol des grössten Kreises bezeichnen, von dem der Bogen LL' ein Theil ist, und zwar denjenigen Pol, der in Bezug auf diesen Bogen ebenso liegt, wie der Punkt 1 in Bezug auf den Bogen 23. Dann ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$yz' - y'z = \cos 1\lambda \,.\, \sin 23 \,.\, \sin LL'$$

oder, da $23 = 90^\circ$,

$$\begin{aligned} yz' - y'z &= \cos 1\lambda \,.\, \sin LL', \text{ und ebenso} \\ zx' - z'x &= \cos 2\lambda \,.\, \sin LL', \\ xy' - x'y &= \cos 3\lambda \,.\, \sin LL'. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit x'', y'', z'' und addirt sie dann, so erhält man mit Hülfe des zweiten in V angeführten Satzes

$$\triangle = \cos\lambda L'' \,.\, \sin LL'.$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann L'' auf demselben grössten Kreise liegen, von dem der Bogen LL' einen Theil bildet; dann ist $\lambda L'' = 90^\circ$ und daher $\triangle = 0$. Liegt dagegen L'' ausserhalb jenes grössten Kreises, so tritt der zweite Fall ein, wenn L'' und λ auf derselben Seite, der dritte, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Kreises liegen: in beiden Fällen bilden die Punkte L, L', L'' ein sphärisches Dreieck, und zwar folgen diese Punkte im zweiten Falle in derselben Reihenfolge auf einander wie die Punkte 1, 2, 3, während im dritten Falle die Reihenfolge die entgegengesetzte ist. Bezeichnet man die Winkel jenes sphärischen Dreiecks einfach mit L, L', L'' und mit p die vom Punkte L'' auf die Seite LL' gefällte sphärische Höhe, so wird

$$\sin p = \sin L \,.\, \sin LL'' = \sin L' \,.\, \sin L'L'',$$

ferner ist

$$\lambda L'' = 90^\circ \mp p,$$

wobei das obere Zeichen für den zweiten, das untere für den dritten Fall gilt. Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \pm \triangle &= \sin L \,.\, \sin LL' \,.\, \sin LL'' \\ &= \sin L' \,.\, \sin LL' \,.\, \sin L'L'' \\ &= \sin L'' \,.\, \sin LL'' \,.\, \sin L'L'' \end{aligned}$$

ist. Uebrigens kann man den ersten Fall als sowohl im zweiten wie im dritten enthalten ansehen; und ebenso erkennt man leicht, dass $\pm \triangle$ das sechsfache Volumen der Pyramide darstellt, deren Ecken die Punkte L, L', L'' und der Kugelmittelpunkt sind. Endlich schliesst man hieraus unmittelbar, dass derselbe Ausdruck $\pm \frac{1}{6} \triangle$ allgemein das Volumen einer beliebigen **[103]** Pyramide darstellt, deren Ecken im Coordinatenanfangspunkte und in den Punkten mit den Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' liegen.

3.

Von einer krummen Fläche sagt man, dass sie in einem auf ihr gelegenen Punkte A eine stetige Krümmung besitzt, wenn die Richtungen der Geraden, die von A nach den verschiedenen dem Punkte A unendlich nahen Punkten der Fläche gezogen werden können, sämmtlich von ein und derselben durch A gehenden Ebene unendlich wenig abweichen. Diese Ebene berührt, wie man zu sagen pflegt, die krumme Fläche in A. Sobald dieser Bedingung in einem Punkte nicht genügt werden kann, wird hier die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen, wie es z. B. an der Spitze eines Kegels stattfindet. Die folgenden Untersuchungen sollen auf solche krummen Flächen oder auf solche Theile von Flächen beschränkt werden, bei denen die Stetigkeit der Krümmung nirgends unterbrochen wird. Wir bemerken nur noch, dass die Methoden, welche zur Bestimmung der Lage der Berührungsebene dienen, für singuläre Punkte, in denen die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen wird, ihre Bedeutung verlieren und auf Unbestimmtes führen müssen.

4.

Die Lage der Berührungsebene wird am bequemsten durch die Lage des auf ihr im Punkte A errichteten Lothes bestimmt; man nennt dasselbe eine Normale der krummen Fläche. Die Richtung dieser Normale soll durch den Punkt L auf der Oberfläche der Hülfskugel dargestellt und

$$\cos 1L = X,\ \cos 2L = Y,\ \cos 3L = Z$$

gesetzt werden, während mit x, y, z die Coordinaten des Punktes A bezeichnet werden sollen. Es seien ferner $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines andern Punktes A' der krummen Fläche, ds der unendlich kleine Abstand desselben von A; endlich sei λ der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung des Bogenelements AA' darstellt. Dann wird

$$dx = ds . \cos 1\lambda,\ dy = ds . \cos 2\lambda,\ dz = ds . \cos 3\lambda,$$

und da $\lambda L = 90^\circ$ sein soll,

$$X \cos 1\lambda + Y \cos 2\lambda + Z \cos 3\lambda = 0.$$

[**104**] Aus dieser Gleichung in Verbindung mit den vorhergehenden ergiebt sich

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Nun giebt es zwei allgemeine Methoden, eine krumme Fläche analytisch darzustellen. Die erste Methode benutzt eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z; diese Gleichung soll, wie wir annehmen wollen, auf die Form $W = 0$ gebracht sein, wo W eine Function der Veränderlichen x, y, z ist. Es sei das vollständige Differential der Function W

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz,$$

so wird auf der krummen Fläche

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

und daher auch

$$P \cos 1\lambda + Q \cos 2\lambda + R \cos 3\lambda = 0.$$

Da diese Gleichung, eben so wie die oben aufgestellte, für die Richtungen aller auf der Fläche liegenden Bogenelemente ds gelten soll, so übersieht man leicht, dass X, Y, Z den Grössen P, Q, R proportional sein müssen; und in Folge dessen wird, da noch

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

ist, entweder

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Die zweite Methode stellt die Coordinaten als Functionen von zwei neuen Veränderlichen p, q dar. Durch Differentiation dieser Functionen mögen die Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned} dx &= a\,dp + a'dq, \\ dy &= b\,dp + b'dq, \\ dz &= c\,dp + c'dq; \end{aligned}$$

[105] dann erhält man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die oben aufgestellte Formel:

$$(aX + bY + cZ)\,dp + (a'X + b'Y + c'Z)\,dq = 0.$$