ABHANDLUNGEN ZUR KRISTALLOGRAPHIE

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649765690

Abhandlungen zur Kristallographie by Quintino Sella & F. Zambonini

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

QUINTINO SELLA & F. ZAMBONINI

ABHANDLUNGEN ZUR KRISTALLOGRAPHIE

Trieste

Abhandlungen

zur

Kristallographie.

Von

Quintino Sella.

Herausgegeben

von

F. Zambonini
in Neapel.

Mit 8 Figuren im Text.

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1906.

[45]

Über das Verknüpfungsgesetz der Kristallformen einer Substanz.[1]

1. Die Beziehung der verschiedenen Kristallformen, die eine Substanz zeigen kann, wenn man die Polymorphiefälle nicht berücksichtigt, wurde bis jetzt entweder durch die Achsen, auf die jede Fläche bezogen wird, oder durch die Zonen des Kristallsystems ausgedrückt. Der Zweck dieser Abhandlung ist, einen neuen Ausdruck dieses Gesetzes bekannt zu machen, sowie die Herleitung einiger für die theoretische und praktische Kristallographie wichtigen Schlüsse, aus den neuen oder aus den alten Ausdrücken durch Methoden, die von anderen nicht erforscht wurden[2].

2. Das Gesetz der Achsen kann man wie folgt zusammenfassen: Es seien alle Kristallformen einer Substanz in geeigneter Weise geordnet, und seien die Durchschnittslinien drei oder mehrerer beliebiger Flächen als Achsen angenommen, so werden zwei andere beliebige Flächen die Achsen in solchen Entfernungen von ihrem gemeinsamen Anfang schneiden, daß ihr Quotient zu den Quotienten der analogen, auf jede der anderen Achsen gemessenen Entfernungen in rationalem Verhältnisse steht.

Nehmen wir die Durchschnittslinien dreier gegebener Flächen als Achsen und die Entfernungen der Punkte, in denen solche Achsen von einer vierten beliebigen Fläche durchschnitten werden, vom Koordinatenanfang, als Parameter an, so genügt es, um dieses Gesetz in aller Allgemeinheit experimentell zu beweisen, zu untersuchen, ob jede andere Fläche des Kristallsystems in bezug auf sie das oben erwähnte Gesetz befriedigt. Ist das der Fall, so kann man geometrisch beweisen, daß das

154160 1*

Gesetz auch gültig sein wird, wenn man die Durchschnittslinien anderer beliebiger Flächen als Achsen und die Entfernungen der Punkte, in denen eine andere beliebige Fläche solche Achsen schneidet, vom Anfangspunkte als Parameter annimmt.

3. Als Beobachtungstatsache setzen wir voraus, daß eine Kristallfläche in irgend einem Punkte des Raumes verschoben werden kann, ohne daß ihre kristallographische Lage beeinflußt wird, sobald sie sich selbst parallel bleibt.

Seien X, Y, Z drei recht- oder schiefwinklige Achsen, aus dem Zusammentreffen dreier gegebener Flächen entstanden; die Gleichung einer vierten, auf sie bezogenen Fläche kann

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

sein, wo a, b, c irrational sein können.

Die Gleichung jeder anderen Fläche, die wir, dem im 2. Art. ausgedrückten Gesetze gehorchend, annehmen, müßte von der Form

$$h\left(\frac{x}{a}\right)+k\left(\frac{y}{b}\right)+l\left(\frac{z}{c}\right)=e$$

sein, wo h, k, l rationale Zahlen bedeuten, während e beliebig irrational sein kann.

[46] Setzen wir in der vorstehenden Gleichung

$$\frac{x}{a}=x'; \quad \frac{y}{b}=y'; \quad \frac{z}{c}=z',$$

d. h. nehmen wir a als Maßstab auf der X-, b auf der Y-, c auf der Z-Achse an, so wird sie

$$hx'+ky'+lz'=e. \tag{A}$$

Für eine gegebene Fläche des Kristallsystems sind h, k, l Zahlen, deren Verhältnisse bestimmt und rational sind; e ist unbestimmt und kann rational, irrational und gleich Null sein.

Nach *Whewell* und *Miller* bezeichnen wir mit dem Symbol hkl die Fläche, deren Gleichung (A) ist.

4. Seien nun hkl, $h'k'l'$ zwei Flächen, deren Durchschnittslinie AB ist; diese Kante sei in A durch die Fläche mnp, in B durch die Fläche $m'n'p'$ begrenzt und in M von der Fläche $m''n''p''$ geschnitten. Es wird

$$\frac{AM}{AB}=\frac{Om'-Oa'}{O\,b'-Oa'}$$

sein, und die Werte von Oa', Om', Ob' könnte man aus den x-Werten ableiten, die die zwei ersten Gleichungen befriedigen; wir schreiben sie so hin, daß wir sie mit den drei letzten nach und nach gleichzeitig bestehend annehmen.

$$\begin{aligned} hx' + ky' + lz' &= e\,, \\ h'x' + k'y' + l'z' &= e'\,, \\ mx' + ny' + pz' &= f\,, \\ m'x' + n'y' + p'z' &= f'\,, \\ m''x' + n''y' + p''z' &= f''\,. \end{aligned}$$

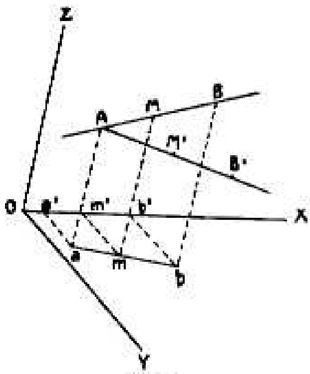

Fig. 1.

Aber auch ohne diese Gleichungen aufzulösen, bemerkt man, daß wir die berücksichtigten Flächen sich selbst parallel verschieben können, so daß e, e', f, f', f'' rational werden: wir schließen, daß $\frac{AM}{AB}$ in solchem Fall ein rationaler Quotient sein wird.

Ebenso rational wäre das Verhältnis $\frac{AM'}{AB'}$ der Segmente, die von denselben Flächen $m'n'p'$, $m''n''p''$ auf einer zweiten durch A gehenden Kante AB' des Kristallsystems bestimmt sind. Und umsomehr wird $\frac{AM}{AB} : \frac{AM'}{AB'}$ rational sein; dieses Verhältnis wird auch rational bleiben, wenn man die Flächen $m'n'p'$, $m''n''p''$ parallel zu sich selbst beliebig verschiebt, was zu beweisen war.

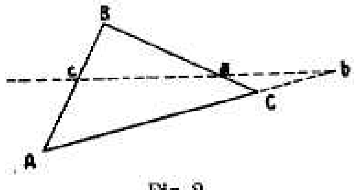

Fig. 2.

5. Man kann dasselbe elementar beweisen, unter Anwendung einiger Eigenschaften des Dreiecks, die zum Theorem des Ptolemäus gehören.

Wird ein Dreieck ABC durch eine Sekante geschnitten, so sind die Segmente, die sie auf den Seiten bildet, in Involution, nämlich

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$$

[47] und daher, wenn die Verhältnisse der Segmente auf zwei Seiten rational sind, muß auch das Verhältnis der Segmente der dritten Seite rational sein.

Auch ist es leicht einzusehen, daß, wenn zwei gerade Linien Aa, Bb von zwei Ecken eines Dreiecks gezogen werden, so daß die gegenüberliegenden Seiten in Segmente geteilt werden, deren Verhältnisse $\frac{aB}{aC}$ und $\frac{bA}{bC}$ rational sind, auch die Verhältnisse $\frac{Oa}{OA}$, $\frac{Ob}{OB}$ der Teile rational sein müssen, in denen die gezogenen Linien sich gegenseitig teilen.

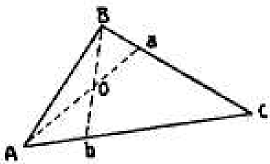

Fig. 3.

Sei nun MNP eine Fläche, die die drei Achsen in den Punkten M, N, P durchschneidet, und $M'N'P$ eine zweite Fläche, die durch denselben Punkt P geht, wie die erste. Die Verhältnisse $\frac{OM'}{OM}$ und $\frac{ON'}{ON}$ werden rational sein, und daher auch $\frac{MQ}{MN}$.

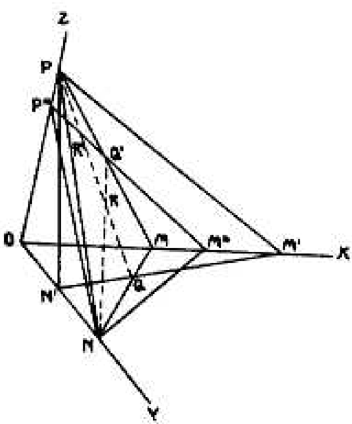

Fig. 4.

Wenn wir durch N eine dritte Fläche $M''NP''$ gehen lassen, die den Durchschnitt der zwei vorstehenden PQ in R berührt, so wird auch $\frac{MQ'}{MP}$ rational sein. Hieraus ergibt sich weiter, daß $\frac{PR}{PQ}$ ebenso rational ist.

Man ziehe nun durch N eine andere Fläche, die PQ in R' berührt, so wäre auch $\frac{PR'}{PQ}$ rational und daher auch $\frac{PR'}{PR}$, w. z. b. w.

6. Bei Kristallzeichnungen und bei Anfertigung der Kristallmodelle muß man auch die absolute Entfernung berücksichtigen, in denen die Flächen die Achsen durchschneiden müssen. In diesem Falle handelt es sich nicht nur um den Bau von

Polyedern, deren Kantenwinkel die des Kristalls, den man darstellen will, sind, sondern auch um die Tatsache, daß man ihnen eine Form geben muß, die sich soviel als möglich der des Kristalls selbst nähert.

Naumann hat in seiner sehr vollständigen Kristallographie *) diese Aufgabe durch eine Reihe Auflösungen behandelt, die jedem Kristalltypus und jeder seiner einfachen Formen eigen sind. Er sucht die absoluten Längen der geschnittenen Kanten und der Segmente, die auf ihnen gemacht werden, aber die Auflösung der Aufgabe ist dadurch wegen der oft sehr komplizierten Wurzeln, die am Ende der Rechnung immer verschwinden, erschwert. Nach dem 4. Art. hat man eine sehr einfache Auflösung dieser Aufgabe, die von jeder Wurzel frei, allen Kristalltypen gemeinsam ist und sich nicht nur auf die einfachen holoedrischen, hemiëdrischen oder tetartoedrischen Formen, sondern auch auf alle denkbaren Flächenkombinationen ausdehnt.

7. Man habe wie im 4. Art. die Kante AB, die den zwei Flächen hkl, $h'k'l'$ gebildet und in A durch die Fläche mnp, in B durch die andere Fläche $m'n'p'$ begrenzt und in M von $m''n''p''$ geschnitten wird.

[48] Schreiben wir von neuem die Gleichungen dieser Ebenen hin:

$$\begin{aligned} hx' + ky' + lz' &= e, \\ h'x' + k'y' + l'z' &= e', \\ mx' + ny' + pz' &= f, \\ m'x' + n'y' + p'z' &= f', \\ m''x' + n''y' + p''z' &= f''. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$P = kl' - k'l \qquad \begin{array}{c} h\ k\ l \\ \times \\ h'\ k'\ l' \end{array}$$

$$P' = k'p - nl' \qquad \begin{array}{c} h'\ k'\ l' \\ \times \\ m\ n\ p \end{array}$$

$$P'' = nl - kp \qquad \begin{array}{c} m\ n\ p \\ \times \\ h\ k\ l \end{array}$$

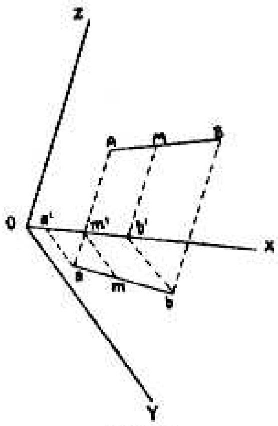

Fig. 5.

und bedeuten $P_{\prime}' P_{\prime}''$ und $P_{\prime\prime}' P_{\prime\prime}''$ die zu P' und P'' analogen Zahlen, die man durch Einsetzen von $m'n'p'$ und $m''n''p''$ für

*) *Naumann*, Lehrbuch der Kristallographie. Leipzig 1830.

mnp erhält, so erhalten wir für die Abszissen der Punkte A, B und M

$$X = \frac{fP + eP' + e'P''}{mP + hP' + h'P''},$$

$$X' = \frac{f'P + e'P'_{,} + e'P''_{,}}{m'P + hP'_{,} + h'P''_{,}},$$

$$X'' = \frac{f''P + eP'_{''} + e'P''_{''}}{m''P + hP'_{''} + h'P''_{''}}$$

und endlich

$$\frac{AM}{AB} = \frac{X'' - X}{X' - X}$$

haben.

Manchmal ist $X = X' = X''$. In diesem Falle wird man

$$\frac{AM}{AB} = \frac{Y'' - Y}{Y' - Y} = \frac{Z'' - Z}{Z' - Z}$$

nehmen, wo

$$Y = \frac{fQ + eQ' + e'Q''}{nQ + kQ' + k'Q''} \text{ usw.}$$

$$Z = \frac{fR + eR' + e'R''}{pR + lR' + l'R''} \text{ usw.}$$

$$Q = lh' - l'h \quad \text{usw.} \qquad \begin{array}{cccc} h & k & l & h \\ & & \times & \\ h' & k' & l' & h' \end{array}$$

$$R = hk' - h'k \quad \text{usw.} \qquad \begin{array}{ccc} h & k & l \\ & \times & \\ h' & k' & l' \end{array}.$$

8. Die Formeln des vorstehenden Artikels liefern eine sehr leichte Auflösung folgender Aufgaben:

1) Auf einer gegebenen Zeichnung oder einem Kristallmodell einen einer neuen Fläche entsprechenden Schnitt zu bestimmen. In diesem Falle sind die Zahlen e, e', f, f' von der schon vorliegenden Konstruktion des Modells oder der Zeichnung gegeben: f'' ist willkürlich, und man kann der Einfachheit wegen $f'' = 1$ setzen.

[49] 2) Die reziproken Entfernungen der verschiedenen Flächen des Modells so zu ordnen, daß die entstehende Form als passendste erscheine. In diesem Falle bestimmt man die Zahlen $ee'ff'f''$ usw. durch so viel Bedingungen, als die Figur, die das Modell zeigen soll, fordert. Häufig laufen verschiedene