ABHANDLUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649765683

Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen by N. H. Abel & E. Galois & H. Maser

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

N. H. ABEL & E. GALOIS & H. MASER

ABHANDLUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN

Trieste

Abhandlungen

über die

Algebraische Auflösung der Gleichungen

von

N. H. Abel und **E. Galois.**

Deutsch herausgegeben

von

H. Maser.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1889.

Vorwort des Herausgebers.

Die Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker während der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, die algebraische Auflösung der den vierten Grad übersteigenden Gleichungen zu finden, hatten zwar zu vielen für die allgemeine Theorie der Gleichungen höchst wichtigen Ergebnissen geführt, immerhin aber waren sie in der Erreichung ihres eigentlichen Endzwecks völlig ohne Erfolg geblieben, so dass Gauss, der erkannt hatte, dass die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen auf der Möglichkeit ihrer Zurückführung auf sogenannte reine Gleichungen beruhe, geradezu die Vermutung aussprach, es möchte die Aufgabe, die algebraischen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade allgemein durch Wurzelgrössen aufzulösen, etwas Unmögliches verlangen (Vgl. *Demonstr. nova theorematis omnem funct. algebr. etc., Art. 9* und *Disquis. arithm. Art. 359*). Doch vermochte auch Gauss die Richtigkeit seiner Vermutung noch nicht zu erweisen. Erst Abel gelang es, nachdem bereits der italienische Mathematiker Ruffini einen Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung allgemeiner Gleichungen von höherem Grade zu geben versucht hatte, in aller Strenge zu begründen, dass das, was man so lange vergeblich gesucht hatte, überhaupt nicht gefunden werden könne, dass sich eine algebraische Gleichung von höherem als dem vierten Grade im Allgemeinen nicht auf reine Gleichungen zurückführen lasse und somit die Darstellung ihrer Wurzeln mit Hülfe von Wurzelgrössen im Allgemeinen unmöglich sei. Damit war den bisherigen fruchtlosen Bemühungen ein Ziel gesetzt und der weiteren Forschung ein neuer Weg gewiesen. Die Frage nach der algebraischen Auflösung der Gleichungen hatte eine ganz andere Fassung angenommen. Abel selbst gab dieser Frage die neue Fassung, indem er die Aufgabe stellte, alle Gleichungen von irgend einem gegebenen Grade zu finden, welche algebraisch lösbar seien. Bereits kannte man eine sehr umfangreiche Klasse specieller Gleichungen von dieser Beschaffenheit. Schon Vandermonde wusste im Jahre 1771, wie aus seiner wichtigen Abhandlung: *Sur la résolution des équations, Art. XXXV**), hervorgeht, dass gewisse auf die Teilung des Kreises in

*) Deutsch herausgegeben von C. Itzigsohn, Verlag von Julius Springer, Berlin 1886.

A*

gleiche Teile bezügliche Gleichungen algebraisch lösbar seien; doch blieb es Gauss vorbehalten, eine allgemeine Theorie dieser Gleichungen aufzustellen und den Nachweis zu führen, dass die Zurückführung derselben auf reine Gleichungen jederzeit möglich sei. Zugleich zeigte er durch den Hinweis darauf, dass auch in einer allgemeineren Theorie, der Theorie der später so genannten elliptischen Functionen, Gleichungen von analogen Eigenschaften auftreten, die Richtung an, nach welcher weitergehende Forschungen sich zu bewegen hatten. Dem von Gauss gegebenen Fingerzeige folgend, verallgemeinerte Abel die von jenem erhaltenen Resultate und bewies, dass, wenn zwei Wurzeln einer irreductiblen Gleichung derart mit einander verbunden sind, dass die eine sich rational durch die andere ausdrücken lässt, die Gleichung mit Hülfe von Wurzelgrössen sich lösen lässt, falls ihr Grad eine Primzahl ist, und dass im andern Falle ihre Auflösung stets zurückgeführt werden kann auf diejenige von Gleichungen niederer Grade.

Gleichzeitig mit Abel und mit nicht geringerem Geschick und Erfolg wie dieser beschäftigte sich der kaum zwanzigjährige ungemein scharfsinnige Galois mit der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen. Kannte man auch durch Abel's Untersuchungen eine grosse Klasse durch Wurzelgrössen auflösbarer Gleichungen, so harrte doch die Frage, ob es ausser diesen noch andere von ähnlicher Beschaffenheit gebe, oder allgemeiner, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür seien, dass sich eine Gleichung algebraisch lösen lasse, noch ihrer Beantwortung. Diese zu geben unternahm Galois. Seine Untersuchungen gipfelten in dem Satze: Damit eine irreductible Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, durch Wurzelgrössen lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass, wenn irgend zwei ihrer Wurzeln gegeben sind, die übrigen sich rational daraus herleiten lassen.

Diese Arbeiten von Abel und Galois bilden die Grundlage für die Untersuchungen hervorragender neuerer Mathematiker auf diesem Gebiete. Denn offenbar waren durch jene Arbeiten noch lange nicht alle Fragen hinsichtlich der algebraisch auflösbaren Gleichungen beantwortet. Es waren Kriterien gegeben, vermittelst deren man zu beurteilen vermöchte, ob eine gegebene Gleichung durch Wurzelgrössen auflösbar ist oder nicht, vorausgesetzt, dass man in einem besonderen Falle wüsste, dass jene Bedingungen erfüllt sind. Aber wie kann man aus der äusseren Form einer gegebenen Gleichung erkennen, ob diese Bedingungen erfüllt sind oder nicht? Giebt es nicht gewisse Verbindungen zwischen den Coefficienten einer Gleichung, aus denen man sofort auf die Möglichkeit der algebraischen Auflösung schliessen kann? Kurz, welches ist der allgemeine Typus der durch Wurzelgrössen auflösbaren Gleichungen jeden Grades? Der Beantwortung dieser schwierigen Fragen, welche auch heute noch nicht vollständig gelungen ist, sind, wie man weiss, einige der wichtigsten und bedeutendsten Abhandlungen eines unserer hervorragendsten Gelehrten gewidmet.

Muss man hiernach die fundamentale Wichtigkeit der Abhandlungen von Abel und Galois über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen rückhaltlos zugeben, so wird man es auch für kein tadelnswertes Beginnen halten dürfen, wenn hier der Versuch gemacht wird, dieselben einem weiteren Kreise zugänglich zu machen. Allerdings wäre lebhaft zu wünschen, dass Abel's Werke bei ihrer grundlegenden Bedeutung in dem Besitze eines jeden Mathematikers sich befänden; ohne ein Urteil darüber abgeben zu wollen, inwieweit dieser Wunsch realisiert ist oder nicht, glaube ich doch behaupten zu dürfen, dass wenigstens für einen grossen Teil unserer Studierenden der Preis derselben ein so erheblicher ist, dass es ihnen kaum möglich ist, sich dieselben anzuschaffen. Auch dass sich die beiden Hauptabhandlungen Abel's in Crelle's Journal befinden, ist kein irgendwie stichhaltiger Grund gegen deren Veröffentlichung in vorliegender Form. Die Galois'schen Abhandlungen einzusehen, ist gar nur wenigen vergönnt, da sie in einem der ersten nur sehr wenigen zugänglichen Bände des Liouville'schen Journals enthalten sind. Da andererseits die Abhandlungen von Abel und Galois über die algebraisch auflösbaren Gleichungen auf das Engste mit einander zusammenhängen, so erschien es zweckmässig, dieselben in einem Bändchen zu vereinigen. Zusammen mit den im selben Verlage erschienenen Abhandlungen von Vandermonde und den Untersuchungen von Gauss über die Kreisteilungsgleichungen wird es einen höchst wertvollen Ueberblick über eine ganze Entwicklungsepoche in der Theorie der algebraischen Gleichungen geben und ein unentbehrlicher Schatz in der Bibliothek eines jeden Mathematikers sein.

Ich will gern anerkennen, dass es vielen lieber, ja dass es aus manchen Gründen auch vielleicht besser gewesen wäre, wenn namentlich die überaus schwer verständlichen und tiefsinnigen Abhandlungen von Galois in der Sprache des Originals neu herausgegeben worden wären, und würde es freudig begrüssen, wenn Jemand sich dieser Mühe unterziehen wollte. Die Gründe, die mich veranlassten, trotzdem eine Uebersetzung derselben zu geben, sind dieselben, wie die, welche ich in meinem Vorwort zu Gauss „Untersuchungen über höhere Arithmetik“ geltend gemacht habe. Ich versichere jedoch, dass ich mich bei der Uebersetzung möglichst wörtlich an das Original gehalten habe.

Es dürfte wohl kaum in der mathematischen Literatur noch andere Abhandlungen geben, welche eines Commentars so sehr bedürften, wie die wichtigeren von Galois. Sie geben die Resultate der tiefsinnigsten und schwierigsten Untersuchungen in der allerknappsten Form häufig ohne jeglichen Beweis oder die leiseste Andeutung des Weges, auf dem sie erhalten wurden. Ein Commentar hierzu, der auch nur den mässigsten Ansprüchen genügte, würde aber völlig aus dem Rahmen dieser Publikation heraustreten und ein durchaus selbstständiges voluminöses Werk bilden müssen, das auch bei sorgfältigster Bearbeitung noch zahlreiche Lücken aufweisen würde. Es muss daher jedem einzelnen Leser überlassen bleiben, sich selbst, so gut es geht, in den Ideeengang der Galois'schen Abhandlungen hineinzuarbeiten. Eine kleine Hülfe kann ihm hierbei der zweite Band von Serret's *Cours d'algèbre supérieure**) leisten, in welchem sich die betreffenden Galois'schen Abhandlungen teilweise analysiert finden. Die Abhandlungen Abel's sind leichter verständlich; ich habe mich daher jeglicher Bemerkung über die von Abel selbst veröffentlichten Abhandlungen enthalten und nur der hinterlassenen fragmentarischen Abhandlung S. 57 einige Notizen beigegeben, um die einen grossen Teil derselben ausmachenden, fast ohne jeden vermittelnden Text aneinandergereihten Formeln zu erläutern. Dass ich dabei im Wesentlichen die im zweiten Bande der von Sylow und Lie besorgten Ausgabe der Abel'schen Werke enthaltenen Noten wiedergebe, wird mir, denke ich, nicht als Unrecht angerechnet werden, da ich mir durch diese Publikation durchaus kein eigenes wissenschaftliches Verdienst zu vindicieren beabsichtige.

In einem kurzen Anhange gebe ich einige die algebraische Auflösung der Gleichungen betreffende historisch interessante Notizen aus den Briefen Abel's an Holmboe und Crelle, sowie einige kleinere Bemerkungen von Galois. Obwohl die letzteren sich nicht auf die algebraische Auflösung der Gleichungen beziehen und auch sonst kein grösseres Interesse beanspruchen können, habe ich sie doch hier aufgenommen, weil sie einerseits nur ein paar Seiten einnehmen und andererseits dazu dienen, die vorliegende Ausgabe der Abhandlungen von Galois zu einer vollständigen zu machen.

Abel und Galois sind bekanntlich beide im jugendlichsten Alter der Wissenschaft entrissen worden; Abel starb im 27. Lebensjahre an einer heimtückischen Krankheit, Galois fiel, noch nicht 21 Jahre alt, im Duell. Und doch haben sie Unsterbliches geleistet, und doch hat ihr durchdringender Geist die mathematische Wissenschaft in einem grossen Teile völlig umgestaltet und ihr neue Bahnen gewiesen. Möge die vorliegende Ausgabe einiger ihrer Abhandlungen dazu beitragen, die Jünger dieser Wissenschaft zum fleissigen Studium der Werke jener Geisteshelden anzuspornen, um aus diesem nie versiegenden Urquell immer neue Wahrheiten zu schöpfen.

---

*) Deutsch bearbeitet von G. Wertheim, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Abhandlungen von Niels Henrik Abel.

Abhandlung über die algebraischen Gleichungen, in welcher die Unmöglichkeit der Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades bewiesen wird (Christiania 1824, Oeuvres complètes, 1881, Bd. I, S. 28) 3

Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen (Crelle's Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. I, 1826. Oeuvres complètes, 1881, Bd. I, S. 66) 8

§ I. Über die allgemeine Form der algebraischen Functionen 8

§ II. Eigenschaften der algebraischen Functionen, welche einer gegebenen Gleichung genügen 14

§ III. Über die Anzahl der verschiedenen Werte, welche eine Function von mehreren Grössen annehmen kann, wenn man die Grössen, welche sie enthält, unter einander vertauscht 17

§ IV. Beweis der Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der Gleichung vom fünften Grade 25

Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen (Crelle's Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. IV, 1829. Oeuvres complètes, 1881, Bd. I, S. 478) 29

§ 4. Von den Gleichungen, deren sämtliche Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können 48

§ 5. Anwendung auf die Kreisfunctionen 51

Über die algebraische Auflösung der Gleichungen (Oeuvres complètes, 1881, Bd. II, S. 217; ist in der zweiten Hälfte des Jahres 1828 niedergeschrieben) 57

§ 1. Bestimmung der allgemeinen Form eines algebraischen Ausdrucks . . 63

§ 2. Bestimmung der Gleichung niedrigsten Grades, welcher ein gegebener algebraischer Ausdruck genügen kann 67

§ 3. Über die Form des algebraischen Ausdrucks, welcher einer irreductiblen Gleichung von einem gegebenen Grade genügen kann 72

Neue Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen (Eine andere Fassung der Einleitung der vorhergehenden Abhandlung. Oeuvres complètes, 1881, Bd. II, S. 329) 82

Abhandlungen von Évariste Galois.

Vorbemerkung von J. Liouville 87

Beweis eines Satzes über die periodischen Kettenbrüche (Annales de Mathématiques de M. Gergonne, t. XIX, S. 294, 1828—1829) 90