COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE: LEÇONS PROFESSÉES À LA SORBONNE EN 1900, PP. 4-209

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649766680

Cours de Physique Mathématique. Figures d'Équilibre d'Une Masse Fluide: Leçons Professées à la Sorbonne en 1900, pp. 4-209 by H. Poincaré & L. Dreyfus

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

H. POINCARÉ & L. DREYFUS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE: LEÇONS PROFESSÉES À LA SORBONNE EN 1900, PP. 4-209

Trieste

FIGURES

D'ÉQUILIBRE

D'UNE

MASSE FLUIDE

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE

MASSE FLUIDE

Leçons professées à la Sorbonne en 1900

PAR

H. POINCARÉ
Membre de l'Institut

RÉDIGÉES PAR L. DREYFUS
Ancien élève de l'École normale supérieure.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1902

Théorème de Green. — Si U et V sont deux fonctions continues à l'intérieur d'un volume T limité par une surface S, on a l'égalité

$$(1)\qquad \int_s \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}d\sigma = \int_\tau \mathrm{U}\Delta\mathrm{V}d\tau + \int_\tau \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)d\tau.$$

Dans cette égalité, on peut permuter U et V, et en retranchant les deux égalités obtenues, on a

$$(2)\qquad \int_s \left(\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}\right)d\sigma = \int_\tau (\mathrm{U}\Delta\mathrm{V} - \mathrm{V}\Delta\mathrm{U})\,d\tau.$$

Cas particuliers de l'égalité (1) : faisons $\mathrm{U} = 1$.

$$(3)\qquad \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\,d\sigma = \int_\tau \Delta\mathrm{V}d\tau.$$

Faisons :

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}$$

$$(4)\qquad \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\,d\sigma = \int_\tau \mathrm{V}\Delta\mathrm{V}d\tau + \int_\tau \left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Si V est une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace, $\Delta\mathrm{V} = 0$,

$$(5)\qquad \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\,d\sigma = \int \left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right]d\tau;$$

le second membre étant positif, le premier l'est aussi.

Si U et V sont des potentiels, sur une sphère de rayon suffisamment grand, U et V sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$, leurs dérivées premières de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$. On peut alors appliquer la formule (1) à l'espace extérieur à une surface S et intérieur à une sphère de rayon très grand. Si ce rayon est suffisamment grand, l'intégrale prise sur la surface de la sphère φ est négligeable : c'est-à-dire est de l'ordre de $\frac{1}{R}$; mais on a la relation

$$\int_s U \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma + \int_s U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = 0$$

car les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux.

Quant aux intégrales des seconds membres, leur somme donne des intégrales étendues à l'espace entier, et on a, en ajoutant les deux égalités obtenues :

$$(6) \quad \int U\Delta V d\tau + \int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace.

De même, la formule (2) donnera

$$\int (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau = 0\,;$$

et, en se rappelant que

$$-\Delta V = 4\pi\rho$$
$$-\Delta V_1 = 4\pi\rho_1,$$

on a

$$(7) \qquad \int (V_1\rho - V\rho_1)\, d\tau = 0$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Cette formule est analogue à celle que l'on trouve dans la théorie de l'électricité,

$$\sum mV_1 - \sum m_1 V = 0.$$

Dans la formule (7), faisons

$$V_1 = V + dV, \qquad \rho_1 = \rho + d\rho;$$

on en conclut la formule

$$\int (V d\rho - \rho dV)\, d\tau = 0. \tag{8}$$

Travail de l'attraction. — Supposons un système de masses m', m'', ..., etc. attirées par un autre m'_1, m''_1, ..., etc.

Soit V'_1, V''_1,... le potentiel aux points m', m'',..., etc., dû aux masses attirantes m'_1, m''_1, ..., etc.

V', V''..., le potentiel aux points m'_1, m''_1,..., dû aux points m', m'', ...

Les masses attirées se déplaçant, on a comme travail

$$\varepsilon = \sum m \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V_1}{\partial z} \delta z \right)$$

en appelant δx, δy, δz, le déplacement du point de masse m;

$$\varepsilon = \sum m \delta V_1.$$

Si je pose

$$\Pi = \sum m V_1,$$

j'aurai

$$\varepsilon = \delta \Pi.$$

Si les masses attirantes se déplacent aussi, mais seules, le potentiel V_1 deviendra

$$V_1 + \delta' V_1$$

et on a

$$\delta' H = \sum m \delta' V'_1.$$

Si les deux déplacements ont lieu simultanément, on a

$$\varepsilon = \delta H + \delta' H.$$

Supposons que les masses attirées forment un volume T, on a

$$H = \int_\tau \rho V_1 d\tau,$$

cette intégrale pouvant d'ailleurs s'étendre à l'espace entier, puisque ρ est nul en dehors de T. On a

$$\delta H = \int V_1 \delta\rho d\tau$$

étendue de même à l'espace entier.

Si la masse attirante est la même que la masse attirée, on a $V = V_1$,

$$\delta H = \int V d\rho d\tau,$$

ce qui peut s'écrire en tenant compte de (8)

$$\delta H = \int \rho \delta V d\tau,$$

ou encore

$$\delta H = \int \frac{\rho \delta V + V \delta \rho}{2} d\tau.$$

Posons maintenant

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau,$$

l'intégrale étant toujours étendue à tout l'espace; W est l'énergie du système.

On a

$$\delta W = \varepsilon.$$

On peut d'ailleurs écrire, puisque $\Delta V = -4\pi\rho$,

$$W = \frac{-1}{8\pi}\int V\Delta V d\tau$$

et, en tenant compte de (6),

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau, \tag{9}$$

l'intégrale étant toujours étendue à l'espace entier.

Conditions d'équilibre. — Ceci étant rappelé, nous allons commencer l'étude du problème que nous nous sommes proposé.

Considérons une masse fluide, isolée de toute influence extérieure, tournant autour d'un axe fixe que nous prendrons comme axe Oz, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω; prenons les axes Ox et Oy, invariablement liés à la masse fluide.

Soit p la pression en un point (x, y, z); p ne dépend que de x, y, z, la force s'exerçant sur l'élément de volume $d\tau$ a pour composantes

$$X = \frac{\partial p}{\partial x}d\tau, \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y}d\tau, \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z}d\tau.$$

Écrivons les conditions d'équilibre relatif, en remarquant que l'accélération de Coriolis est nulle. Si on appelle X, Y, Z les composantes suivant les axes de coordonnées de la force agissant sur la molécule (x, y, z), on a

$$\left\{\begin{aligned} X &= \rho\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2\rho x,\\ Y &= \rho\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2\rho y,\\ Z &= \rho\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\right.$$