

# **GRUNDLEHREN DER NEUEREN ZAHLENTHEORIE**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649201648

Grundlehren der neueren Zahlentheorie by Paul Bachmann

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**PAUL BACHMANN**

**GRUNDLEHREN DER  
NEUEREN  
ZAHLENTHEORIE**



# Göschens Lehrbücherei

I. Gruppe

Reine Mathematik

Band 3

Grundlehren  
der  
Neueren Zahlentheorie

Von

Professor Dr. Paul Bachmann



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger  
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagsanstalt — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung —  
Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1921

11071  
b1278

# Grundlehren der Neueren Zahlentheorie

Von

Prof. Dr. Paul Bachmann

Zweite, verbesserte Auflage

Mit einem Gedächtnisworte

herausgegeben von

Prof. Dr. Robert Haufner

Mit 10 Figuren



248365-  
31. 10. 30

Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger  
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagsbuchhandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung —  
Gang Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1921

## Vorwort zur ersten Auflage.

Mit dem hiermit der Öffentlichkeit übergebenen Werke komme ich einer sehr liebenswürdigen Aufforderung der Verlagshandlung *G. J. Göschen* nach, ihr für die „Sammlung Schubert“ einen Band über Zahlentheorie zu liefern, „der das Thema in moderner Weise bis zu den quadratischen Formen einschließlich, ja bis zu den Zahlkörpern“ behandeln, dabei aber der Tendenz dieser Sammlung entsprechend so geschrieben sein solle, daß das Buch von jedem verstanden werden könne, der die Mathematik der höheren Schulen sich zu eigen gemacht hat. Nach Abfassung meiner anderen zahlentheoretischen Schriften konnte ich mich zur Übernahme einer solchen Aufgabe nur entschließen, indem ich das Schwergewicht eben in jenen Höhepunkt des zu behandelnden Gebietes verlegte, mich dabei jedoch auf den quadratischen Zahlkörper beschränkend. Zu solcher Beschränkung nötigte mich schon allein der vorgesehene Umfang des Bandes zugleich mit der gedachten Tendenz, die gerade für die abstrakte zahlentheoretische Betrachtung eine gewisse Breite der Darstellung unerläßlich macht. Ich habe deshalb auch, um für die Theorie der quadratischen Formen und des quadratischen Körpers den erforderlichen Raum zu gewinnen, in bezug auf die Elemente der Zahlentheorie, die auch kaum einer „modernen“ Behandlung zugänglich gewesen wären, mich kürzer fassen und mit den notwendigsten und wichtigsten Betrachtungen begnügen müssen. Bei der Lehre von den quadratischen Formen habe ich dann versucht, die verschiedenen vorhandenen Auffassungen des Gegenstandes zu einem einheitlich geschlossenen Ganzen zu verknüpfen. Dies gelingt wesentlich mittels der Zahlengitter, durch welche einerseits eine anschauliche geometrische Deutung der Verhältnisse, andererseits in ihren Gitterzahlen die innere Verbindung zwischen den Formen und dem Körper und die eigentlichen Grundelemente für die Ideale des

## VI

letzteren gewonnen werden. Durch solche ungezwungene Verkettung der verschiedenen Glieder dürfte nicht nur ein ästhetisch befriedigendes systematisches Gebilde, sondern auch tiefere Einsicht und Verständnis vom Wesen des Gegenstandes erzielt worden sein.

Die Tendenz meines Werkes, dem ich in Anbetracht der in ihm behandelten Zahlenkörper und -Gitter den Titel: Grundlehren (nicht: die Grundlehren) der neueren Zahlentheorie gegeben habe, ist ersichtlich die gleiche, wie diejenige der neuerdings im Teubnerschen Verlage erschienenen Vorlesungen über Zahlentheorie von *J. Sommer*. Doch unterscheidet sich von diesem Werke das meinige nicht nur darin, daß es weniger hoch hinauf geht und, dem Charakter der Schubert-Sammlung gemäß mehr auf den Anfänger berechnet, den Elementen größere Berücksichtigung widmet, sondern auch in einem engeren Anschlusse an die Auffassungen *Dedekinds* bei der Theorie des quadratischen Körpers und vielleicht in einer noch flüssigeren Verschmelzung beider Theorien, derjenigen der Formen und des Körpers, in ein Ganzes. So hoffe ich, daß es neben dem des Herrn *Sommer* bestehen und ein Publikum finden werde, das sich durch dasselbe mühelos zu den reizvollen Gebieten zahlentheoretischer Forschung leiten und von der Art ihrer Ergebnisse unterrichten lassen will.

Weimar, den 22. Juni 1907.

**Paul Bachmann.**



## Zum Gedächtnisse von Paul Bachmann.

Als heute vor einem Jahre der Tod *Paul Bachmann* die Feder aus der nimmermüden Hand nahm und damit ein arbeitsreiches, echt deutsches Gelehrtenleben zum Abschlusse brachte, fand sich das Manuscript für diese Neuauflage der Grundlehren der neueren Zahlentheorie abgeschlossen vor. Es war ihrem Verfasser eine ganz besondere Freude gewesen, daß von ihnen eine neue Auflage notwendig geworden war, deren Drucklegung selbst noch besorgen zu können, ihm leider nicht mehr beschieden sein sollte. Mir, der ich dem Verstorbenen nahe treten durfte und dessen Freundschaft ich als eine der wertvollsten Errungenschaften meiner Jenenser Jahre ansehe, lag es nun ob, die ihm wiederholt gegebene Zusage, nach seinem Tode die Herausgabe seiner Bücher zu übernehmen, einzulösen.

Da diese zweite Auflage ohne *Bachmanns* Geleit erscheinen muß, so sei es mir gestattet, an Stelle eines Vorwortes kurz des Lebens und Wirkens meines ehrwürdigen Freundes zu gedenken.

*Paul Bachmann* wurde am 22. Juni 1837 in Berlin geboren, wo sein Vater an der dortigen St.-Jakobi-Kirche als Pfarrer wirkte. Nachdem er im Frühjahr 1855 mit dem Zeugnis der Reife das dortige Friedrich-Wilhelm-Gymnasium, an dem er *Schellbach* zu seinen Lehrern zählte, verlassen hatte, widmete er sich zunächst in Berlin dem Studium der Mathematik. Im Herbst 1856 siedelte er dann nach Göttingen über, was für seine wissenschaftliche Richtung von ausschlaggebender Bedeutung werden sollte. Dort war im Jahre vorher *Gauß* gestorben und *Dirichlet*, der bis dahin in Berlin gewirkt hatte, sein Nachfolger geworden. Eines der größten Verdienste *Dirichlets* wird es stets bleiben, durch seine Vorlesungen über Zahlentheorie, die durch ihn den Lehrplänen unserer Universitäten eingefügt sind, das Verständnis von *Gauß*'s monumentalen *Disquisitiones arithmeticae* weiteren wissenschaftlichen Kreisen erschlossen zu haben; bis dahin waren sie nur von wenigen gelesen worden und nicht zuletzt durch eine Menge störender Druckfehler auch schwer lesbar. Allein *Dirichlets* wegen ist *Bachmann* offenbar nach Göttingen gegangen, und in erster Linie hat er seine Vorlesungen gehört. Sofort im Winter 1856/57 hörte er bei ihm Zahlentheorie zusammen mit einem seiner hervorragendsten Schüler, *Dedekind*, der selbst schon als Privatdozent an der Göttinger Universität tätig war und später die *Dirichletschen* Vorlesungen heraus-

## VIII

gegeben hat. Dem Einflusse dieser Vorlesung verdankt *Bachmann* sicherlich seine Vorliebe für die Zahlentheorie, die ihn bestimmte, sich später ganz dieser Königin der Mathematik zu widmen, und ihn zu der einzigartigen Persönlichkeit, als die ihn die Fachgenossen gekannt haben, entwickeln ließ. Seit jener Vorlesung verbanden *Bachmann* enge Beziehungen mit *Dedekind*, mit dem er auch die große Liebe zur Musik teilte. Bei *Dirichlet* hörte *Bachmann* auch noch die Vorlesungen über bestimmte Integrale, partielle Differentialgleichungen und Kräfte, die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken; sonst besuchte er noch eine Vorlesung *Dedekinds* über Gleichungen und *Riemanns* über elliptische und *Abelsche* Funktionen. Vom Herbst 1858 an studierte *Bachmann* wieder in Berlin, vornehmlich bei *Kummer*, bei dem er auch am 24. März 1862 mit der Arbeit de substitutionum theoria meditationes quaedam promovierte.

Im Frühjahr 1864 habilitierte sich *Bachmann* an der Universität Breslau mit der Arbeit de unitatum complexarum theoria; dort wurde er 1867 zum außerordentlichen Professor ernannt und ihm 1873 eine etatmäßige a. o. Professur übertragen. Zwei Jahre später folgte er einem Rufe als Ordinarius an die damalige akademische Lehranstalt in Münster i. W. In den Jahren seiner akademischen Lehrtätigkeit hielt *Bachmann* häufig Vorlesungen über sein Lieblingsgebiet oder auch über einzelne Teile desselben, wodurch er nicht wenig dazu beigetragen hat, der Zahlentheorie einen dauernden Platz unter den Vorlesungen an unseren Universitäten zu sichern. Besondere Genugtuung bereitete es ihm, die Zahl der Freunde und Erforscher dieses Gebietes ständig wachsen zu sehen, und es ist mir unvergänglich, mit welcher Freude er ungefähr vor einem Jahrzehnt, als ich selbst ihm erzählt hatte, daß ich im kommenden Semester wieder Zahlentheorie lesen würde, feststellte, daß dann an zwölf deutschen Universitäten gleichzeitig über dieses Gebiet gelesen würde.

Die zahlreichen Veröffentlichungen *Bachmanns* über zahlen-theoretische Fragen aufzuzählen und zu würdigen, ist hier nicht der geeignete Ort. An dieser Stelle soll näher nur auf seine Werke, die in Buchform vorliegen, eingegangen werden, da sich in ihnen seine volle Eigenart, aus allen Arbeiten und Forschungen über ein zahlen-theoretisches Teilgebiet eine einheitliche Darstellung in klarer, möglichst leicht verständlicher Form und in künstlerischer Abrundung zu schaffen, am schärfsten ausprägt. Diese Werke stammen mit einer einzigen Ausnahme sämtlich aus der Zeit nach seinem 1890 erfolgten

Ausscheiden aus dem akademischen Lehramte. Die Pläne zu ihnen sind älter, aber erst, als er von allen amtlichen Pflichten befreit war und im Ruhestande in Weimar lebte, konnte er daran denken, an ihre Ausführung heranzugehen. Als erstes Werk erschienen im Frühjahr 1892 seine Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, in denen alle Untersuchungen über diese Zahlen, ihre arithmetische Bestimmung und ihre tieferen Eigenschaften, die sie in algebraische und transzendente Irrationalzahlen zu teilen gestatten, dargestellt und zum Schlusse die Beweise von *Hermite* und *Lindemann* über die Transzendenz der Zahlen  $e$  und  $\pi$  wiedergegeben werden.

Noch im Herbst desselben Jahres konnte *Bachmann* — in Ausführung seines großen Planes, eine Gesamtdarstellung der Zahlentheorie in ihren Hauptteilen zu geben — den ersten Teil derselben, die Elemente der Zahlentheorie, erscheinen lassen. Er wollte nach seinen eigenen Worten in diesem seinen Lebenswerke in Einzeldarstellungen die verschiedenen Hauptgebiete der Zahlentheorie in ihrem wesentlichen Inhalt und in ihren charakteristischen Zügen zeichnen, um von den hauptsächlichsten Forschungen, durch die sie gewonnen worden sind, Kenntnis zu geben, und um in ihrer Gesamtheit eine umfassende Darstellung des heutigen Standes der Zahlentheorie zu liefern. In diesem ersten Teile hat er mit Benutzung des Gruppenbegriffes alles das dargestellt, was *Gauß* in den ersten fünf Kapiteln seiner *Disq. ar.* behandelt hat. Zwei Jahre später folgte als zweiter Teil die analytische Zahlentheorie, in der zum ersten Male die zahlreichen Forschungen zusammenfassend dargestellt wurden, die sich auf analytische Methoden stützen. Als dritter Teil wurde das einzige von *Bachmann* während seiner akademischen Lehrtätigkeit (1872) erschienene Buch, seine *Lehre von der Kreisteilung* aufgenommen, in der sich so wundervoll Geometrie, Arithmetik und Algebra verknüpfen. Im Jahre 1898 erschien die erste Abteilung des vierten Teiles, welcher der Arithmetik der quadratischen Formen gewidmet ist. Diese erste Abteilung gibt als Vorbereitung die Theorie der ternären Formen und dann die Theorie der allgemeinen quadratischen Formen. Die zweite Abteilung, die erst 1915 vollendet wurde, behandelt die Reduktion der Formen. Infolge der durch den Krieg und vor allem durch den frevelhaften Umsturz hervorgerufenen wirtschaftlichen Nöte konnte diese vollständig druckfertig vorliegende Abteilung leider bis jetzt noch nicht veröffentlicht werden, trotzdem nach dem übereinstimmenden Urteile aller Mathematiker, die das Manuskript kennen gelernt haben, ein ganz