# MÉTHODE PRATIQUE POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649776627

Méthode Pratique pour la Résolution Numérique Complète des Équations Algébriques ou Transcendantes by M. E. Carvallo



Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017



www.triestepublishing.com

M. E. CARVALLO

# MÉTHODE PRATIQUE POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES

Trieste

# MÉTHODE PRATIQUE

POUR LA

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE

DES

# ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES

PAR

Moïse Emmanuel
M. E. CARVALLO

DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1896

# MÉTHODE PRATIQUE

POUR LA

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE

## DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES

## HISTORIQUE

« *Étant donnée une équation numérique, sans aucune notion de la grandeur ni de la nature des racines, en trouver les valeurs numériques, exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra.* Ce problème n'a pas encore été résolu. C'est l'objet des recherches suivantes. »

Ainsi s'exprime Lagrange au commencement de son Mémoire sur *la résolution des équations numériques* (1767). Posé par Viète (*), ce problème est étudié d'abord dans des cas spéciaux par lui-même, par Harriot, Ougtred, Pell, etc. Descartes l'aborde dans toute sa généralité et l'engage dans une voie nouvelle par sa règle des signes, insuffisante il est vrai.

« Telle qu'elle est néanmoins (**), cette règle a été pendant deux siècles ce qu'on a eu de mieux. Les plus grands analystes, à commencer par Newton et à finir par Lagrange, n'ont pu, malgré leurs efforts, faire un pas décisif après Descartes. L'équation aux carrés des différences (de Lagrange) simple en théorie, nécessite des calculs fatigants et quelquefois interminables. Fourier atteint presque le but. En 1820, il publie une règle dont il était en possession depuis plusieurs années. S'il échoue, ses efforts aident Sturm à réussir dans un théorème qu'il donne en 1829. Ce théorème exige seulement une dérivée et une opération analogue à la recherche du plus grand commun diviseur... *Toutefois l'esprit a je ne sais quel pressentiment qu'il existe quelque voie plus simple.* »

Telle est en peu de mots, d'après Bordas-Démoulin, l'histoire de cette belle théorie des équations, exposée par nos professeurs avec un si grand talent qu'elle semble à leurs élèves l'œuvre d'un seul génie. Saisis d'admiration pour tant de puissance, nous sommes entraînés par ce même talent à confondre notre pensée avec celle des inventeurs, si bien que l'idéal de Sturm devient volontiers le nôtre : découvrir les racines par son théorème, puis en calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut par la règle de Newton. Et cependant le pressentiment du savant

(*) *De numerosa potestarum adfectarum resolutione.*
(**) BORDAS-DÉMOULIN, *Le Cartésianisme*, p. 122; 1843.

philosophe est si bien justifié que la réalisation en existait déjà depuis plus de quatre ans quand il publia son Livre en 1843.

En effet, le professeur Gräffe, de Zurich, estimant que la *séparation des racines*, poursuivie par ses devanciers, n'est qu'une méthode de tâtonnements, a donné dans un Mémoire couronné par l'Académie de Berlin en 1839 une méthode directe remarquable par la simplicité de principe et d'application. Elle consiste à calculer une puissance des racines assez grande pour que leurs rapports deviennent considérables. Ainsi grossies, les racines sont séparées et immédiatement mesurables, comme les objets fins et rapprochés sont séparés et rendus mesurables par le microscope. Cette idée remonte à Daniel Bernoulli. Elle sert de base à la méthode que ce célèbre mathématicien a donnée « dans *les Mémoires à l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. III, où il enseigne comment on peut, à l'aide des séries récurrentes, assigner les valeurs approchées des racines d'une équation algébrique quelconque ». Mais la méthode de Bernoulli ne donne directement que la plus grande racine. De plus, comme l'indique Euler dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Chap. XVII, elle peut se trouver en défaut. Gräffe au contraire trouve toutes les racines. Il obtient ce résultat par une opération plusieurs fois répétée, comme le micrographe augmenterait le grossissement par une série de verres gradués. Cette opération, d'arithmétique pure, est si simple qu'elle n'exige aucune connaissance théorique; elle s'exécute sur les coefficients de l'équation sans préparation préliminaire. Plus de difficulté telle que la recherche du plus grand commun diviseur; plus de tâtonnements dont la longueur indéterminée est incompatible avec les besoins de la pratique. Nous possédons enfin, comment Duhamel l'ignore-t-il? la méthode qu'il réclame en 1866 (*) « *que tout le monde puisse appliquer avec le même succès* ».

Seulement Gräffe s'est borné à déterminer les *racines réelles et les modules des racines imaginaires, quand ces quantités diffèrent les unes des autres.*

C'est en effet tout ce que ses devanciers se sont proposé. Le célèbre astronome allemand Encke, admirateur de la méthode de Gräffe, se préoccupe dès lors de la compléter. Dans ce but, il publie en 1841 un Mémoire de soixante pages dans l'appendice à l'*Annuaire de l'observatoire de Berlin*. Ce Mémoire, laissé dans l'oubli malgré l'intérêt du sujet et le renom de son auteur, tomba par hasard sous les yeux de D. Miguel Merino, de l'observatoire de Madrid, qui cherchait depuis longtemps, mais en vain, dans les livres français, la méthode pressentie par Bordas et réclamée par Duhamel. Il fut tellement satisfait de sa découverte qu'il publia en espagnol une traduction libre du Mémoire (1879). Dans son enthousiasme, il reproche à nos auteurs leur silence à l'égard du savant allemand et en accuse « la paresse d'esprit, la routine des écoles et le patriotisme très mal entendu ». Mais à côté de ces sévères critiques, M. Merino ne justifie-t-il pas cet oubli d'un travail relégué dans une publication astronomique, spécial à un observatoire particulier? Lui-même s'étonne de l'y trouver; il en juge la lecture

(*) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e partie, p. 258.

pénible. Pour le mettre à la portée des lecteurs, il a dû séparer les difficultés dans des Chapitres distincts, puis ajouter des exemples et des éclaircissements nombreux. Avec ces modifications, le livre espagnol a 260 pages. Il présente les qualités de clarté et de méthode que le traducteur refuse au Mémoire original. Il y a plus, à côté de son admiration pour la méthode de Gräffe, M. Merino avoue que le complément d'Encke ne répond pas entièrement au désidératum.

Et en effet, dans sa recherche des racines imaginaires, Encke n'emprunte au calcul de Gräffe que la connaissance du module. Par là il méconnaît l'idée féconde de l'inventeur suisse. La théorie en devient compliquée; l'application exige des développements trigonométriques, la formation du plus grand commun diviseur et retombe ainsi, pour les imaginaires, dans les difficultés de la méthode de Sturm. On le voit, s'il est permis d'apprécier la théorie d'Encke parce qu'elle aborde pour la première fois avec succès les racines imaginaires, il faut bien reconnaître que le savant allemand n'a rien ajouté de *pratique* à la méthode de Gräffe, parce qu'il n'en a pas vu toute la portée.

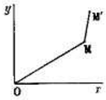
Dans ce Mémoire, je reprends le problème d'Encke. Je démontre que la règle de Gräffe donne immédiatement et sans nouveau calcul les racines imaginaires, comme les racines réelles; que la méthode s'applique sans modification au cas des racines d'égal module. On verra même que ma démonstration embrasse le cas non abordé jusqu'ici où l'équation proposée a ses coefficients imaginaires. Tous ces résultats sont obtenus d'un seul coup par un *théorème fondamental* sur la *fragmentation* de l'équation.

Dépassant ensuite le but poursuivi par Encke, je démontre que la méthode s'applique avec un caractère de supériorité remarquable au cas où le premier membre de l'équation est une fonction holomorphe de l'inconnue. Ce résultat s'étend d'abord au cas des fonctions méromorphes, comme la résolution des équations entières s'étend au cas où le premier membre est une fonction algébrique fractionnaire; puis il s'étend aux autres fonctions en isolant les points critiques.

Je me suis efforcé de donner à l'exposition de la théorie une rigueur qui fait défaut dans l'œuvre de Gräffe et d'Encke, et qui est nécessaire pour ouvrir à une méthode nouvelle les portes de l'enseignement; on reconnaîtra cependant que je ne me suis pas livré à de vaines spéculations, mais que, toujours guidé par un but pratique, j'ai appliqué chaque point de la théorie à un exemple. Je n'ai même pas craint de m'arrêter aux détails qui sont de nature à faciliter l'exécution des calculs.

## § I. — Théorie de la résolution numérique des équations algébriques.

**1. Définitions.** — 1° *Approximations dans les imaginaires.* — Soit M l'affixe de l'imaginaire $z$. Il est clair que la précision de la position du point M représente la précision de $z$. De là les définitions suivantes où l'on désigne par M' l'affixe de $z'$, valeur approchée de $z$.




*L'erreur absolue* de $z'$ est $z' - z$. Elle est représentée par le vecteur MM'.

*La grandeur* de cette erreur est la longueur MM' ou
$$\text{mod.}\,(z'-z).$$

*L'erreur relative* de $z'$ est
$$\frac{\text{MM}'}{\text{OM}} = \frac{\text{mod.}\,(z'-z)}{\text{mod.}\,z}.$$

L'imaginaire, représentée par le vecteur MM', est *négligeable* devant $z$ quand son module est inférieur à la grandeur d'erreur absolue qu'on tolère sur $z$, ou bien encore quand $\dfrac{\text{MM}'}{\text{OM}}$ est inférieur à l'erreur relative qu'on tolère sur $z$.

2° *Ordre des racines.* — Ces considérations conduisent à ranger les racines d'une équation suivant l'ordre de grandeur de leurs modules, sauf à laisser arbitraire l'ordre des racines qui ont même module. Nous choisirons l'ordre décroissant. Les racines et leurs modules seront représentés respectivement par des lettres grecques et par les lettres romaines correspondantes.

3° *Racines séparées.* — Je dirai que deux racines consécutives sont *séparées* quand la deuxième sera *négligeable* devant la première.

4° *Résolution approximative.* — Si un nombre substitué à l'inconnue dans le premier membre d'une équation algébrique donne un résidu *négligeable* devant le terme maximum *(en module)*, je dirai que l'équation est *satisfaite à l'approximation considérée.*

**2. Idée de la méthode.** — Imaginons une équation du quatrième degré et soient, pour fixer les idées, **4**, **3**, **2** et **2** les modules de ses racines. L'équation aux puissances $\mu$ des racines aura pour solutions quatre nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dont les modules sont
$$a = 4^\mu, \qquad b = 3^\mu, \qquad c = 2^\mu, \qquad d = 2^\mu.$$

On prendra $\mu$ assez grand pour séparer les racines, c'est-à-dire pour rendre $\delta$ et $\gamma$ négligeables devant $\beta$, et $\beta$ devant $\alpha$. Le nombre $\mu$ dépend de l'approximation que l'on veut apporter au calcul.

Soit
$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

l'équation aux puissances $\mu$ des racines, on aura :

$$\begin{aligned} -A &= \alpha+\beta+\gamma+\delta &&= \alpha, && \text{à l'approximation du calcul,}\\ B &= \alpha\beta+\ldots &&= \alpha\beta, && \text{»}\\ -C &= \alpha\beta(\gamma+\delta)+\ldots &&= \alpha\beta(\gamma+\delta), && \text{»}\\ D & &&= \alpha\beta\gamma\delta, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, à l'approximation demandée,

$$\alpha = -A, \qquad \beta = \frac{B}{-A}, \qquad \gamma+\delta = \frac{-C}{B}, \qquad \gamma\delta = \frac{D}{B};$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont donc donnés par les équations

$$x+A=0, \qquad Ax+B=0, \qquad Bx^2+Cx+D=0;$$

ou encore par les équations

$$x^4+Ax^3=0, \qquad Ax^3+Bx^2=0, \qquad Bx^2+Cx+D=0,$$

dont les premiers membres sont trois fragments du premier membre de l'équation qui a pour racines $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. De ces racines on déduit facilement celles de l'équation proposée.

Il serait malaisé de déterminer *a priori* le nombre $\mu$ et de former d'un coup l'équation aux puissances $\mu$ des racines. Les convenances de la pratique conduisent à procéder ainsi :

On forme l'équation aux carrés changés de signes des racines de l'équation proposée : c'est la *première transformée;* on forme la transformée de la nouvelle équation, c'est la *deuxième transformée*. On continue ainsi jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ transformée qui a pour racines les puissances $\mu = 2^n$ de celles de la proposée, le nombre $n$ étant assez grand pour séparer les racines dont les modules sont différents. L'idée de séparer ainsi les racines est due au professeur Gräffe de Zurich (1837), pour le cas où l'équation a ses racines réelles et distinctes. Mais elle s'applique aussi bien aux équations quelconques, même à coefficients imaginaires. Avant d'aborder le *théorème fondamental* qui préside à la fragmentation de l'équation et remplace à lui seul les théories compliquées d'Encke, examinons quel effort exige cette fragmentation.

**3 Nombre des transformées nécessaires pour séparer deux racines consécutives $\alpha$ et $\beta$.** — Ce nombre ne dépend évidemment que du rapport des racines et de la précision qu'on veut apporter au calcul. Je considère la transformée aux puissances $\mu$ des racines de la proposée. Nous voulons qu'elle sépare les racines $\alpha$ et $\beta$, c'est-à-dire que $\beta^\mu$ soit négligeable devant $\alpha^\mu$, ou que $\frac{b^\mu}{a^\mu}$ soit plus petit que l'erreur relative $\varepsilon$ qu'on tolère sur la racine $\alpha$. On en déduit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\mu > \frac{1}{\varepsilon}$$

ou

$$\mu \log\frac{a}{b} > \log\frac{1}{\varepsilon}.$$