LEHRBUCH DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE IN HOMOGENEN KOORDINATEN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649391615

Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten by Wilhelm Killing

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

WILHELM KILLING

LEHRBUCH DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE IN HOMOGENEN KOORDINATEN

Trieste

Lehrbuch

der

analytischen Geometrie

in

homogenen Koordinaten

von

Dr. Wilhelm Killing,
Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W.

Erster Teil:

Die ebene Geometrie.

Mit 50 Figuren im Text.

Paderborn.
Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.
1900.

Vorwort.

Das wichtigste Hilfsmittel zur analytischen Erforschung der metrischen Eigenschaften des Raumes werden stets die rechtwinkligen Koordinaten Descartes' bilden; für die erste Einführung des Studierenden in die analytische Geometrie sind sie geradezu unentbehrlich. Der Anfänger will nur mit solchen Gröfsen operieren, welche eine klar hervortretende geometrische Bedeutung haben und welche sich infolgedessen in jedem Augenblicke durch Konstruktion zur Anschauung bringen lassen. Diese Eigenschaft bildet aber einen besondern Vorzug der Cartesischen Koordinaten. Dazu kommt die Leichtigkeit, mit der man in die Theorie dieser Koordinaten eindringen kann; sobald der Anfänger einige wenige Begriffe aufgenommen hat, vermag er mit ihrer Hilfe auf analytischem Wege zahlreiche Lehrsätze, die ihm bis dahin unbekannt waren, aufzufinden und zu beweisen. Daher darf man den Unterricht in der analytischen Geometrie nur mit diesen Bestimmungsgröfsen beginnen.

Andererseits mufs man aber von jedem angehenden Mathematiker auch volle Beherrschung der Dreiecks-Koordinaten in der Ebene und der Tetraeder-Koordinaten im Raume, der sog. homogenen Koordinaten, verlangen. Will der Studierende dies Ziel mit Sicherheit erreichen, so mufs er sich möglichst früh mit diesen Gröfsen bekannt machen; er mufs ihre Beziehung zu den Cartesischen Koordinaten genau kennen und mufs endlich dazu angehalten werden, mit den neuen Koordinaten zu arbeiten. Demnach erachte ich es für das beste, den Anfänger ganz rasch unter Benutzung der Cartesischen Koordinaten mit den einfachsten Eigenschaften der Kurven und Flächen zweiter Ordnung bekannt zu machen und ihn dann sofort in die homogenen Koordinaten einzuführen. Wer bereits mit Hilfe leichterer Rechnungen in die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades eingedrungen ist, hat hinreichendes Interesse für die Anwendung der Analysis auf die Geometrie gewonnen, um vor längeren Darlegungen, wie sie die Einführung der neuen Koordinaten nun einmal notwendig macht, nicht zurückzuschrecken. Auch bietet sich dem Studierenden alsdann noch Lehrstoff genug, in den er sich mit dem neuen Hilfsmittel hineinarbeiten mufs, um einerseits vollständig in die Theorie der homogenen Koordinaten einzudringen, andererseits für die Mühe belohnt zu werden, welche mit der Aneignung der neuen Methode verbunden ist. Als den trefflichsten Gegenstand zur Einübung der homogenen Koordinaten erachte ich die Lehre von den Polareigenschaften der Kurven und Flächen zweiten Grades. Denn erstens sind homogene Koordinaten für die Behandlung dieses Gebietes am geeignetsten; zweitens lassen sich die meisten Eigenschaften jener Kurven und Flächen den Polareigenschaften unterordnen oder doch zu ihnen in Beziehung bringen. Dadurch erwachsen aber dem Unterricht zahlreiche Vorteile. Der Mathematiker kann nicht früh genug dazu angeleitet werden, eine einmal angewandte Untersuchungsmethode nach den verschiedensten Seiten zu verfolgen. Zudem werden verschiedenartige Entwicklungen leicht verständlich, wofern sie von einem einzigen Grundgedanken beherrscht werden. Je mehr endlich die Zahl der Lehrsätze anwächst, welche im Gedächtnisse festgehalten werden müssen, um so notwendiger wird es, zahlreiche Einzelsätze in einem einzigen allgemeinen Satze zusammenzufassen.

An sich sind die homogenen Dreiecks- und Tetraeder-Koordinaten besonders geeignet, um die projektiven Eigenschaften zu erforschen; sie direkt für die Metrik zu benutzen, würde verkehrt und geradezu schädlich sein. Sie leisten aber auch für die Erforschung der metrischen Eigenschaften wesentliche Dienste, sobald man die uneigentlichen Gebilde eingeführt hat. Dafs diese Gebilde zuweilen (hoffentlich von keinem Mathematiker) falsch aufgefafst und mit wirklichen Gebilden verwechselt werden, kann keinen Grund bilden, sie vom Unterrichte auszuschliefsen. Bei richtiger Behandlung wird auch der Anfänger in ihnen nichts weiter erblicken, als ein Mittel, verschiedenartige Sätze sprachlich zusammenzufassen und einheitlich zu begründen. Er wird dies

Hilfsmittel aber, nachdem er sich in den Gebrauch hineingelebt und seine Vorzüge kennen gelernt hat, nicht mehr entbehren wollen. Dennoch wird es gut sein, wenn man den Lernenden beim weiteren Fortschreiten zwingt, sich stets die in dem zusammenfassenden Satze enthaltenen geometrischen Einzelsätze klar zu machen und die Beweise auch unabhängig von jenem Hilfsmittel zu führen.

Nach der Einführung der unendlichfernen Gebilde stellen sich die Cartesischen Koordinaten als ein specieller Fall der homogenen Koordinaten dar. Schon aus diesem Grunde darf man sich nicht scheuen, für zahlreiche Untersuchungen wieder auf die Koordinaten Descartes' zurückzugehen. Um nur ein Beispiel anzuführen, verweise ich auf die konfokalen Flächen zweiten Grades. Die Eigenschaften dieses Systems von Flächen führen sich auf möglichst wenige Principien zurück, wenn man dasselbe mit Plücker als eine solche Flächenschar zweiter Klasse betrachtet, welcher der unendlichferne Kugelkreis angehört. Man wird daher am besten zuerst die Schar der Flächen zweiter Klasse untersuchen und dabei, weil dies Gebiet der Projektivität angehört, Tetraeder-Koordinaten benutzen; alsdann wird man die hierfür gefundenen Resultate auf den angegebenen besondern Fall übertragen und zuletzt die Theorie der konfokalen Flächen mit Hilfe von rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten zum Abschlufs bringen.

Der Fälle sind aber recht viele, wo die mit den rechtwinkligen Koordinaten vorzunehmenden Operationen erst dann in ihrer vollen Bedeutung gewürdigt werden können, wenn man die Beziehung zu allgemeinen projektiven Untersuchungen kennt. Auch hierin liegt ein gewichtiger Grund dafür, die homogenen Koordinaten recht früh einzuführen. Dem Lernenden erwächst dann der Vorteil, dafs er schon im Beginne seiner Studien angehalten wird, sich jedesmal für die ihn beschäftigende Untersuchung die passendsten Koordinaten, überhaupt die geeignetsten Hilfsmittel auszuwählen.

Eine solche Behandlung der homogenen Koordinaten, wie sie mir nach den vorstehenden Darlegungen notwendig erscheint, habe ich in den mir zugänglichen Büchern nicht gefunden. Zwar gehen die gröfseren Werke über analytische Geometrie, an denen unsere Litteratur glücklicherweise keinen Mangel hat, auch auf jene Koordinaten ein. Aber einerseits beabsichtigen diese Bücher mehr, den gesamten bis jetzt gewonnenen Wissensstoff mitzuteilen oder zur selbständigen Forschung anzuregen, und eignen sich schon aus diesem Grunde weniger für die erste Einführung; andererseits überlassen sie dem Leser die Beantwortung mancher wichtigen Frage und bieten so dem Anfänger zu grofse Schwierigkeit. Aus diesem Grunde glaube ich, manchem Studierenden einen Dienst zu erweisen, wenn ich den zweiten Teil meiner Vorlesungen über analytische Geometrie, wie ich sie seit einer Reihe von Jahren an der hiesigen Akademie halte, zu einem Lehrbuche ausarbeite und dem Druck übergebe.

Ich setze somit in den folgenden Entwicklungen die Bekanntschaft mit den Cartesischen Koordinaten und einige Übung in ihrem Gebrauche voraus. Hierfür möchte ich vor allem auf die Lehrbücher von Frischauf, Ganter und Rudio, sowie von Schur verweisen. Wer aus einem dieser Bücher die einleitenden Kapitel und auch den einen oder andern weiteren Abschnitt aus der Geometrie der Ebene und des Raumes durchgenommen hat, wird mit Leichtigkeit in das vorliegende Lehrbuch eindringen können.

Von analytischen Vorkenntnissen durfte ich auf die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Determinanten nicht verzichten. Dagegen war ich nicht genötigt, von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch zu machen. Diejenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, bei deren Herleitung die Infinitesimalrechnung nicht entbehrt werden kann, werden meines Erachtens am besten bei der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen, speciell bei der Krümmungstheorie, durchgenommen. Jedoch erachtete ich es aus mancherlei Gründen für angebracht, wenigstens in den Übungen partielle Differentialquotienten zu benutzen.

Dafs ich die Projektivität aus der Metrik hergeleitet und nicht selbständig begründet habe, wird man hoffentlich bei dem Charakter des Buches billigen. Reifliche Erwägungen waren es auch, die mich bestimmten, die Plückerschen Koordinaten der geraden Linien des Raumes nicht aufzunehmen.

Nur ungern habe ich darauf verzichtet, in einem historischen Überblicke die Entwicklung der homogenen Koordinaten darzulegen. Ich verkenne nicht, dafs es auch für den Anfänger interessant und bildend sein mufs, zu erfahren, in welchem Sinne dies

Hilfsmittel von den einzelnen Forschern, welche es zuerst benutzt haben, angewandt worden ist. Aber ich mochte den Umfang des Buches nicht weiter anwachsen lassen und durfte aus diesem Grunde auf die allmähliche Entwicklung der Methode nicht eingehen. Infolge dessen hatte es keinen rechten Zweck, bei einzelnen Lehrsätzen den ersten Entdecker anzugeben; ich mufste also von allen Litteraturnachweisen absehen.

Den einzelnen Paragraphen habe ich zahlreiche Übungsaufgaben beigefügt. Wenn manche unter ihnen dem gereifteren Leser zu einfach erscheinen sollten, so wolle er berücksichtigen, dafs sie hauptsächlich den Zweck haben, die vorgetragenen Sätze und Methoden einzuüben und zu befestigen, und dafs aus diesem Grunde die Lösung auch dem Anfänger keine Schwierigkeit bieten darf. An einzelnen Stellen habe ich schwierigere Übungen gegeben, dann aber auch eine Anleitung zur Lösung beigefügt.

Dem ersten Teile, welcher die Geometrie der Ebene behandelt, habe ich zahlreiche Figuren beigegeben. Das schien mir für den zweiten Teil, die Geometrie des Raumes, nicht notwendig. Bei der engen Beziehung, in der die beiden Teile zu einander stehen, erleichtert der Vergleich mit der entsprechenden ebenen Figur das Verständnis weit mehr, als eine noch so gute Zeichnung es vermag. Für die Flächen zweiter Ordnung können zudem meines Erachtens Modelle nicht entbehrt werden, und diese werden von der Firma Schilling in Halle a. d. S. zu einem so billigen Preise geliefert, dafs der Studierende sie auch bei seinen häuslichen Studien zur Hand haben kann.

Münster i. W., 9. Juni 1900.

W. Killing.