

**ÜBER DIE THEORIE  
DES  
KREISELS, HEFT III**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649098613

Über die Theorie des Kreisels, Heft III by F. Klein & A. Sommerfeld

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**F. KLEIN & A. SOMMERFELD**

**ÜBER DIE THEORIE  
DES  
KREISELS, HEFT III**



F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,  
ÜBER DIE  
**THEORIE DES KREISELS.**

---

HEFT III.

DIE STÖRENDE EINFLÜSSE.  
ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER  
1903.

*Astronomy  
add to lib*

### Anzeige von Heft III der Kreiseltheorie.

Nach längerer Pause, welche durch meinen Übergang in ein neues Lehramt bedingt wurde, folgt auf das zweite Heft der Theorie des Kreisels (erschienen 1898) nunmehr ein drittes Heft. Dasselbe bildet nicht, wie es beabsichtigt war, den Schluß des Werkes; es zeigte sich nämlich, daß sich der Stoff außerordentlich dehnte, sobald das allgemeine mathematische Schema der Theorie, gemäß dem ursprünglichen Plan des Werkes, auf die besonderen Bedingungen des Versuches oder auf die mannigfachen Fragestellungen der verschiedenen an der Kreiseltheorie interessierten Spezialwissenschaften angewandt wurde. Deshalb sind in diesem Hefte von den Anwendungen der Kreiseltheorie nur diejenigen auf Astronomie und Geophysik zur Darstellung gekommen; die technischen und physikalischen Anwendungen verbleiben für ein viertes (letztes) Heft.

Während sich der Beginn der vorliegenden Lieferung inhaltlich an die vorangehenden Kapitel anlehnt und in einem Nachtrag zu Kap. VI den auf der Horizontalebene spielenden Kreisel behandelt (durch Näherungsrechnungen mit strenger Fehlerabschätzung), geht der Inhalt des Kapitels VII wesentlich über den Kreis derjenigen Probleme hinaus, welche in der analytischen Mechanik idealer Mechanismen behandelt zu werden pflegen. Hier werden die allgemeinen Erfahrungen über die Wirkung der Reibungseinflüsse dargestellt und im Anschlusse daran die Reibung im Stützpunkte des Kreisels und deren Wirkung, das Aufrichten der Kreiselaxe, ausführlich diskutiert. Da einerseits die erfahrungsmäßigen Grundlagen für den Ansatz der Reibungsprobleme nicht sehr sicher sind, da andererseits die mathematischen Schwierigkeiten bei der strengen Durchführung des Ansatzes sehr groß sein würden, so wird die Behandlung zum Teil auf graphischem Wege, mit Zuhilfenahme von Vernachlässigungen und Näherungsmethoden durchgeführt, wie solche bereits an früheren Stellen der Kreiseltheorie wiederholt empfohlen wurden. Die Schärfe dieser Methoden reicht völlig aus, sofern man als eigentliches Ziel im Auge behält: von den in der Wirklichkeit zu beobachtenden Erscheinungen ein klares qualitatives und ein innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen genaues quantitatives Bild zu entwerfen. Neben der Reibung im Stützpunkte werden als

*Mayer gft*

QA 862  
T 7 K 6  
v. 3

Astron  
Lib

weitere, die ideale Kreiselbewegung entstellende Ursachen der Luftwiderstand, die Elastizität des Kreiselmaterials und der Unterlage berücksichtigt. Hierbei waren zum Teil bereits die Rücksichten auf spätere Anwendungen maßgebend, zum Teil sollten diese Untersuchungen als ein Beispiel zur Mechanik der wirklichen Erscheinungen oder, wie es hier gelegentlich ausgedrückt wird, zur irdischen Mechanik dienen (im Gegensatz zur himmlischen Mechanik, in welcher die hier behandelten Einflüsse meist nicht in Betracht kommen, oder zur reinen analytischen Mechanik, in welcher solche Einflüsse zu Gunsten der Eleganz der mathematischen Entwicklung gewöhnlich vernachlässigt werden). In einem Nachtrag zu diesem Kapitel wird sodann, unter Hinzuziehung von Beobachtungsmaterial, die Behandlung des auf der Ebene spielenden Kreisels mit Rücksicht auf die Reibung ergänzt.

Kapitel VIII behandelt in einem ersten Abschnitt die astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie, in einem zweiten die geophysikalischen.

In den klassischen Problemen der Präcession und der durch die Mondbewegung erzwungenen Nutation konnten füglich neue Ergebnisse nicht beigebracht werden. Der Gegenstand ist von altersher so erschöpfend behandelt worden, daß die vorliegende Darstellung lediglich darauf hinzuzielen hatte, die für den Nichtfachmann nicht immer durchsichtige Darstellungsweise der Astronomen durch ein anschaulicheres Verfahren zu ersetzen. Das Mittel hierzu bot eine Methode von Gauß zur Störungsrechnung, welche hier nach verschiedenen Richtungen ausgebaut wird.

Im Gegensatz hierzu sind die in dem geophysikalischen Abschnitt untersuchten Probleme zum Teil jüngsten Datums. Es handelt sich hier namentlich um die freien Nutationen der Erdaxe, deren Periode von Chandler festgestellt wurde, und weiter um die Erscheinung der Polschwankungen überhaupt. Sowohl in der Darstellung des objektiven Sachverhaltes wie in der Erklärung desselben dürfte die hier gebotene Behandlung entschiedene Fortschritte aufweisen. Wegen der grundlegenden Wichtigkeit der Frage wurden bei der Erklärung der vierzehnmönatlichen Chandlerschen Periode auch die erforderlichen Hilfssätze aus der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie aufgenommen und auf vereinfachtem Wege bewiesen. Ferner wurde zur Erklärung der jährlichen Periode der Polschwankungen die Theorie der meteorologischen Massentransporte entwickelt, wobei sich abermals die in den früheren Heften betonte Impulstheorie und die freiere, begriffliche Auffassung der dynamischen Differentialgleichungen als besonders fruchtbar erwies. Den Schluß des geophysikalischen Abschnittes bildet die

Besprechung der berühmten Foucaultschen Kreiselversuche zum Nachweis der Erdrotation. Hier kam es einerseits darauf an, unnötige mathematische Schwierigkeiten auszuschalten, welche in den älteren Darstellungen der Foucaultschen Versuche einen breiten Raum einnehmen, andererseits die störenden Einflüsse hervorzukehren und ihrer Größenordnung nach abzuschätzen.

Auf Wunsch meines hochverehrten Lehrers F. Klein habe ich schließlich darauf hinzuweisen, daß ich bei der Abfassung dieses Heftes noch in weit höherem Grade wie bei den vorangehenden Heften über den Inhalt der ursprünglichen, von Herrn Klein gehaltenen Universitätsvorlesung hinausgegangen bin. Die in Kapitel VII gegebenen Ausführungen zur Mechanik der störenden Einflüsse waren in jener Vorlesung nur in allgemeinen Umrissen postuliert worden; die hierzu erforderlichen Integrations- und Näherungsmethoden (auch in dem Nachtrag zu Kap. VI) sowie alle Einzelresultate rühren von mir allein her. Was die astronomischen Anwendungen betrifft, so erkannte Herr Klein die Vorzüge des Gaußischen Verfahrens, nach welchem er in jener Vorlesung insbesondere das Präcessionsproblem behandelte; die Anwendung desselben Verfahrens auf das Problem der Nutationen sowie alles Zahlenmäßige habe ich dagegen von mir aus hinzugefügt. Von dem Problem der Polschwankungen war in jener Vorlesung überhaupt nicht die Rede, sodaß die hier gebotenen etwaigen Fortschritte (Kap. VIII § 6—8) als mein Eigentum zu betrachten sind. Für die Auffassung der Foucaultschen Versuche waren die Grundlinien bereits von Herrn Klein vorgezeichnet.

Im übrigen betone ich gern, daß mir das fortgesetzte Interesse, welches Herr Klein an der Weiterführung des Werkes genommen hat, sowie die mancherlei Anregungen, die er mir bei Vorbesprechungen und bei der Korrektur zukommen ließ, meine eigene Arbeit wesentlich erleichtert haben. Ferner habe ich den Herren Schwarzschild und Wiechert zu danken für viele wertvolle Nachweise und Berichtigungen zu den astronomischen und geophysikalischen Gegenständen.

Möge das vorliegende Heft nicht nur dem Mathematiker und Physiker von Nutzen sein, der die Mechanik um ihrer selbst willen treibt und an der Hand des hier so eingehend ausgeführten Beispiels zu einem tieferen und lebendigeren Verständnis der Wissenschaft vordringen will, sondern möge dieses sowie das folgende Heft auch von den Vertretern der Astronomie, der Geophysik und der Technik gern zu Rate gezogen werden, so oft dieselben auf ihrem besonderen Gebiete mit der Theorie der Kreiselwirkungen in Berührung kommen!

Aachen, im Juli 1903.

A. Sommerfeld.



## Anhang zu Kapitel VI.

### § 10. Der auf der Horizontalebene spielende Kreisel.

Als Gegenstück zur Theorie des Kreisels mit festem Stützpunkte soll die Bewegung des Kreisels mit horizontal beweglichem Stützpunkte anhangsweise behandelt werden, also diejenige Bewegung, an welche Erwachsene und Kinder in erster Linie bei dem Worte „Kreiselbewegung“ denken. Wir beabsichtigen hierbei in analytischer Hinsicht lange nicht so weit zu gehen, wie bei dem vorigen Probleme, sondern werden zufrieden sein, wenn wir ein klares Bild von dem qualitativen Charakter der Bewegung entwerfen können. Dies gelingt, mit Umgehung aller analytischen Schwierigkeiten, welche sonst auftreten würden, wenn wir *mit begrenzter Genauigkeit* rechnen, wie solches im Kap. IV, § 9 empfohlen wurde. Wollen wir die Bewegung nur mit derjenigen Schärfe feststellen, wie sie etwa die mit bloßem Auge angestellte Beobachtung eines gewöhnlichen Kreisel-Spielzeugs, ohne besondere Verfeinerung der Beobachtungsmittel und ohne sorgsame Ausschaltung von Störungsursachen liefert, so können wir uns sogar mit einer recht geringen Genauigkeit begnügen. Vom mathematischen Standpunkte ist offenbar auch eine grobe Näherung logisch befriedigend, *sofern wir den bei unserer Rechnung zugelassenen Fehler abschätzen können*. Auf diesen Punkt werden wir im Folgenden besonderen Wert legen. Dagegen würde es uns, bei Zugrundelegung des soeben genannten Maßstabes für die anzustrebende Genauigkeit, wertlos scheinen, durch Heranziehung höherer analytischer Hilfsmittel den Genauigkeitsgrad der Rechnung weiter zu verfeinern.

Von der den Kreisel tragenden Ebene werden wir voraussetzen, daß sie *vollkommen glatt*, also reibungslos sei, da wir auf die Wirkung der Reibung im nächsten Kapitel zurückkommen. Der Gegendruck der Ebene, die Reaktion  $R$  derselben gegen den Kreisel, ist dann senkrecht gegen die Ebene, also vertikal gerichtet. Da der Stützpunkt  $O$  nicht mehr so sehr wie bei dem früheren Problem ein geometrisch ausgezeichneter Punkt ist, werden wir nicht diesen, sondern den mechanisch ausgezeichneten Schwerpunkt  $S$  zum Bezugspunkte im

Sinne von Kap. II, § 2 wählen. Die Verbindungslinie  $OS$  heisst wie früher die Figurenaxe, ihr Winkel gegen die Vertikale  $\vartheta$ . Die Entfernung  $OS$  werde mit  $E$ , die Gesamtmasse des Kreisels mit  $M$  bezeichnet. Es werde abkürzend  $P = MgE$  gesetzt, so dass  $P$  wie früher das Moment der Schwere um die zur Figurenaxe senkrechte horizontale Axe durch  $O$  bei horizontaler Lage der Figurenaxe bedeutet. Wir nehmen, worin keine wesentliche Spezialisierung liegt, der Kürze wegen an, dass das für den Schwerpunkt konstruierte Trägheitsellipsoid eine Kugel sei; der allen Axen durch  $S$  gemeinsame Wert des Trägheitsmomentes heisse  $A$ .

Als äussere Kräfte kommen, da wir die Reibung vernachlässigen, nur die Schwere  $Mg$  und der Gegendruck  $R$  in Betracht, dessen Grösse sich aus dem Folgenden ergeben wird. Das Potential der Schwere ist (bis auf eine willkürliche Konstante)

$$(1) \quad V = Mgz - P \cos \vartheta,$$

wo  $z = E \cos \vartheta$  die vertikale Koordinate des Schwerpunktes in dem in Figur 68 angedeuteten festen Koordinatensystem ist. Dagegen liefert der Gegendruck  $R$  zur potentiellen Energie keinen Beitrag, da er keine

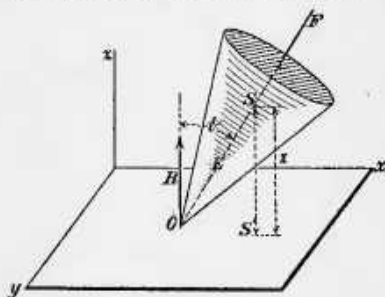


Fig. 68.

Arbeit leistet, sondern senkrecht gegen die Bewegung seines Angriffspunktes gerichtet ist. Andererseits liefert die Schwere in unserem Bezugspunkte  $S$  kein Drehmoment, während der Gegendruck zu einem Drehmomente Anlaß giebt, welches die „Knotenlinie“ zur Axe hat, also diejenige Linie, welche sowohl auf der Vertikalen wie auf der Figurenaxe senkrecht steht.

Wir fassen wie üblich die äusseren Kräfte zu einer *Einzelkraft* und einer *Drehkraft* (Kräftepaar) hinsichtlich des Bezugspunktes  $S$  zusammen. Nach dem eben Gesagten ist die *Einzelkraft* beständig vertikal gerichtet und gleich  $R - Mg$ . Die *Axe der Drehkraft* liegt dauernd horizontal und senkrecht zur Figurenaxe; der Grösse nach ist sie gleich dem Momente von  $R$  um  $S$ .

Die wichtigsten Aufschlüsse über den Verlauf der Bewegung liefert uns hier wie überall unser Impulssatz aus Kap. II, § 5, welcher uns in anschaulicher Weise die Schwerpunkts- und Flächensätze zusammenfasst. Der Impuls zerlegt sich hier ebenfalls in zwei Bestandteile, den *Einzelimpuls* (oder Schiebestofs) und den *Drehimpuls* (oder Drehstofs).

Die Komponenten des ersteren nach den im Raume festen Koordinatenachsen  $x, y, z$  werden wie früher mit  $[X], [Y], [Z]$ , die Komponenten des letzteren mit  $l, m, n$  bezeichnet. Wir werden auch die Komponenten  $L, M, N$  des Drehimpulses nach einem im Kreisel festen Koordinatensystem nötig haben, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt und dessen  $Z$ -Axe die Figurenaxe ist.

Nach dem angezogenen Impulssatze ist nun die Änderungsgeschwindigkeit jeder Komponente des Einzelimpulses und des Drehimpulses gleich dem augenblicklichen Werte der entsprechenden Komponente der Einzelkraft und Drehkraft. Aus dem, was wir über Richtung und Axe dieser letzteren bemerkten, folgt aber, *dafs die Horizontal-komponenten des Einzelimpulses und die Vertikalkomponente des Drehimpulses während der Bewegung konstant bleiben; die äufseren Kräfte beeinflussen nur die Vertikalkomponente des Schiebestofses und die Horizontal-komponenten des Drehstofses.*

In Zeichen heifst dieses

$$(2) \quad [X] = \text{const.}, \quad [Y] = \text{const.}, \quad n = \text{const.}$$

Da nach pag. 102  $[X], [Y]$  und  $[Z]$  den betreffenden Schwerpunkts-geschwindigkeiten proportional sind ( $[X] = Mx'$  etc.), so sagen die beiden ersten Gleichungen (2) aus, dafs die Horizontalprojektion des Schwerpunktes eine gerade Linie mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Natürlich steht und fällt dieses Resultat mit der Annahme, dafs im Stützpunkt keine Reibung auftritt.

Nehmen wir den Impulssatz für die dritte Komponente des Schiebestofses (bez. den entsprechenden Schwerpunktssatz) hinzu, so erhalten wir:

$$\frac{d[Z]}{dt} = R - Mg.$$

Diese Gleichung können wir als *Bestimmungsgleichung der Reaktionskraft* auffassen; indem wir für  $[Z]$  den Wert  $Mz'$  eintragen, ergibt sich

$$(3) \quad R = Mz'' + Mg.$$

Aufser der Gleichung  $n = \text{const.}$  besteht auch hier die Gleichung

$$(4) \quad N = \text{const.},$$

wie wir aus dem „modifizierten Impulssatze“ II b von pag. 145 schliessen. Nach diesem Satze ist nämlich die Änderungsgeschwindigkeit des Drehstofses *relativ zum Körper* nach Axe und Gröfse gleich dem Drehmoment der äufseren Kräfte vermehrt um die resultierende centrifugale Drehkraft (vgl. pag. 144). Letztere verschwindet beim Kugelkreisel schlechtweg, die Axe des ersteren steht nicht nur auf der Vertikalen,