COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THEORIE DES FONCTIONS. LECONS SUR LES SINGULARITES DES FONCTIONS ANALYTIQUES, PROFESSEES L'UNIVERSITE DE BUDAPEST

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649766604

Collection de Monographies sur la Theorie des Fonctions. Lecons sur les singularites des fonctions analytiques, professees l'universite de Budapest by Paul Dienes

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

PAUL DIENES

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THEORIE DES FONCTIONS. LECONS SUR LES SINGULARITES DES FONCTIONS ANALYTIQUES, PROFESSEES L'UNIVERSITE DE BUDAPEST

Trieste

LEÇONS
SUR LES SINGULARITÉS
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES.

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE ÉMILE BOREL,
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par ÉMILE BOREL; 1898 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL; 1900 .... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par ÉMILE BOREL; 1901 .... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par *R. d'Adhémar*; 1902 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, rédigées par *Ludovic Zoretti*; 1903 .... 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1904 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par ÉMILE BOREL, rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes de PAUL PAINLEVÉ et de HENRI LEBESGUE; 1905 .... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy*; 1905 .... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905 .... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1906 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par PIERRE BOUTROUX, avec une Note de PAUL PAINLEVÉ; 1908 .... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par OTTO BLUMENTHAL; 1910 .... 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, par ÉMILE BOREL, rédigées par *A. Denjoy*; 1910 .... 5 fr. 50

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par PAUL MONTEL; 1910 .... 3 fr. 50

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France par LUDOVIC ZORETTI; 1910 .... 3 fr. 75

SOUS PRESSE :

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, par VITO VOLTERRA.

Leçons sur les fonctions quasi-périodiques, par J. HADAMARD.

Leçons sur les fonctions de lignes, par VITO VOLTERRA.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS
SUR LES SINGULARITÉS
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES

PROFESSÉES A L'UNIVERSITÉ DE BUDAPEST

PAR

Paul DIENES,
Privat-Docent.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

PRÉFACE.

L'étude systématique des singularités des fonctions analytiques commence par la *Thèse* de M. Hadamard parue dans le *Journal de Mathématiques*, en 1892. Ce Mémoire, devenu déjà classique, a exercé d'abord son influence par les beaux résultats de sa deuxième Partie consacrée à l'étude des singularités polaires; toute une série de géomètres, parmi lesquels MM. Fabry, Leau, Le Roy, etc. se sont efforcés d'arriver à des résultats également concrets. La meilleure preuve de leur succès est l'exposé bien connu que M. Hadamard a publié, en 1901, sous le titre *La série de Taylor et son prolongement analytique* dans la collection « Scientia ». Il est à remarquer cependant que la plupart des théorèmes ainsi établis ne font que déterminer des conditions suffisantes ou bien pour que le point 1 soit le seul point singulier sur le cercle de convergence ou dans le plan complexe entier, ou bien pour que le cercle de convergence soit une coupure, et, chose curieuse, souvent les méthodes bien différentes conçues par ces auteurs n'arrivent qu'à reproduire les mêmes résultats. M. Hadamard a signalé la cause des difficultés de ces recherches en établissant une distinction fondamentale concernant les méthodes à suivre dans l'étude des singularités.

Considérons, en effet, une fonction analytique définie par son développement taylorien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et par le prolongement analytique de cet élément de fonction. Il y a d'abord des méthodes qui ne supposent aucune restriction sur les coefficients a_n. Il s'agit donc en ce cas d'étudier les propriétés générales de la fonction analytique et en particulier celles de ses singularités. L'importance des recherches de ce genre est évidemment très grande. Mais il est à craindre, ajoute M. Hadamard, que ces résultats ne restent toujours trop peu nombreux.

On peut supposer d'autre part que la fonction à étudier appartienne à une classe bien connue de fonctions et il s'agit alors de caractériser cette classe de fonctions, c'est-à-dire les propriétés qui la définissent, par les propriétés limites des coefficients.

Ayant établi cette distinction, M. Hadamard, pour mieux assurer le progrès des études de ce genre, propose de prendre entre ces points de vue opposées *une position intermédiaire convenable*. C'est une telle position que nous avons tâché de choisir dans le présent Ouvrage.

Pour faire mieux ressortir l'idée directrice qui nous a guidé dans ce choix du nouveau point de vue, faisons une remarque simple qui paraîtra d'abord presque banale. Il n'est pas exact de dire que les propriétés de la fonction analytique définie par une série de Taylor sont déterminées par les propriétés limites des coefficients de la série. La forme même du développement entre aussi en jeu et son rôle n'est pas négligeable. Il faut donc replacer les coefficients dans la série et chercher des relations entre l'allure de la série et l'allure de la fonction. Plus généralement, la détermination de la fonction par le prolongement analytique d'une série de Taylor est mathématiquement très compliquée, ce n'est que logiquement qu'elle est réalisée; nous devons conquérir pour les mathématiques cette notion purement logique de la fonction; en d'autres termes, il faudra représenter tout le contenu de ce concept à l'aide des moyens dont nous disposons dans l'analyse mathématique. Voilà le but de la théorie générale des fonctions analytiques, du moins au point de vue de Méray-Weierstrass qui est aussi le nôtre. Il s'agit donc d'établir des relations à la fois générales et précises entre fonction et représentation.

Quel sera maintenant notre point de vue intermédiaire? Sauf dans des cas exceptionnels ou pour élucider des problèmes déjà posés, nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur les coefficients a_n. Nos résultats entreront donc dans la théorie générale des fonctions analytiques. D'autre part nous choisirons en même temps des singularités plus ou moins particulières, telles que les pôles, les points critiques algébriques ou algébrico-logarithmiques, ou bien des singularités plus générales comme, par exemple, celles où l'on suppose que la fonction soit bornée dans un certain voisinage d'un point ou bien qu'elle ne le soit pas, etc., et nous chercherons à établir des relations précises entre ces singularités et l'allure de la réprésentation (une suite de polynomes ou de fonctions entières dans l'espèce) si l'on y substitue l'affixe du point singulier en question. Ainsi, tout en conservant la généralité, nous aboutirons à des résultats concrets qui feront partie d'une étude plus particulière des fonctions analytiques. On pourrait résumer notre point de vue en disant que nous chercherons à représenter les singularités par la nature particulière de la divergence que la représentation présente au point envisagé.

Toutes les recherches de ce genre sont inspirées par la troisième Partie du Mémoire fondamental de M. Hadamard. Mais les vues profondes de l'illustre géomètre sont restées sans influence jusqu'au jour où, à la suite des travaux très importants de M. Borel et de ceux de M. Mittag-Leffler, la représentation de la fonction dans ses points réguliers a reçu une solution aussi générale qu'inattendue. En effet, si l'on ne spécialise pas la classe des fonctions analytiques envisagées, l'étude générale de la singularité en un point signifie l'étude des valeurs régulières au voisinage de ce point. Donc on a été obligé de conquérir d'abord, par une formule aussi simple et aussi compréhensive que possible, les valeurs régulières de la fonction à examiner. Ce n'est que par ces recherches que le chemin s'est ouvert pour *une théorie générale des singularités* dont nous tâchons de donner la première esquisse dans le présent Ouvrage.

Pour rendre plus facile la lecture de ce qui va suivre, nous avons établi à leur place les propriétés essentielles de chacune des représentations dont nous nous sommes servi au cours de ce Livre. Nous avons espéré répondre ainsi aux intentions de M. Borel à qui nous présentons ici nos vifs remercîments d'avoir bien voulu nous donner l'occasion d'exposer nos recherches dans sa Collection. En dehors de la connaissance des propriétés élémentaires des fonctions analytiques, les *Leçons* de M. Lebesgue *sur les séries trigonométriques* sont le seul Ouvrage dont la connaissance est désirable pour la lecture du présent Livre.

Nous ne pouvons pas enfin passer sous silence la collaboration continue et si efficace de Mme Valérie Dienes qui n'a jamais cessé de nous prêter son précieux concours pendant toute la rédaction de ce Livre. De la démonstration de quelques théorèmes nouveaux jusqu'à la revision des épreuves, elle a pris sa part de tout le travail qu'exigeait la rédaction, et il y a bien peu de pages qui n'aient ressenti l'effet de ses conseils soigneux.

PAUL DIENES.

Budapest, février 1912.