MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649776535

MéMoire Sur L'intéGration Des éQuations Aux DéRivéEs Partielles Des Deux Premiers Ordres
by Joseph Graindorge

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

JOSEPH GRAINDORGE

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES

Trieste

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES,

PAR JOSEPH GRAINDORGE,

Docteur spécial en sciences physico-mathématiques,
répétiteur à l'École des mines de Liége, membre de la Société royale
des sciences de Liége, etc.

~~Liége : 1869~~
Bruxelles : F. Hayez
1872

INTRODUCTION HISTORIQUE.

L'intégration des équations aux dérivées partielles forme une des théories les plus importantes de l'analyse. Elle doit principalement cette importance aux nombreux problèmes qui conduisent à des équations de cette espèce. Ses applications se présentent, pour ainsi dire à chaque pas, dans la géométrie, la physique mathématique et la mécanique.

Les premiers travaux sur cet objet sont dus à *d'Alembert* (1). On en trouve cependant déjà des traces dans un mémoire de *N. Bernoulli* sur les trajectoires orthogonales (2). *D'Alembert* a montré que les intégrales de ces équations doivent renfermer des fonctions arbitraires, et il a découvert le moyen de déterminer le nombre de ces fonctions. Cette recherche a aussi occupé *Condorcet* (3). Toutefois, suivant *Cousin* (4), qui a traité le même sujet (5), *Euler* avait, en 1734, intégré une équation de ce genre (6); il est donc le véritable inventeur de ce calcul, qu'il a développé d'une manière très-simple (7). En outre, il a donné un grand nombre de détails sur les équations d'un ordre supé-

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1767 et 1769.

(2) *Acta eruditorum;* année 1720.

(3) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1770, 1771 et 1772.

(4) Montucla, *Histoire des mathématiques*, t. III, p. 344.

(5) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1778, 1783 et 1784.

(6) *Mémoires de Pétersbourg*, t. VII.

(7) Euler, *Institutiones calculi integralis*, t. III. Petropolis; 1770.

rieur au premier. *D'Alembert*, qui en fit les premières applications aux sciences physiques, n'avait rien enseigné sur la nature des intégrales de ces équations. C'est seulement en 1773, que *Laplace* [1] a trouvé le moyen de reconnaître si une telle équation peut avoir une intégrale donnée. Il a indiqué en même temps une méthode de réduction de l'équation du second ordre à un système d'équations différentielles ordinaires; mais il n'a traité que les équations linéaires à deux variables indépendantes. Dans le même travail, on trouve cette remarque importante que les équations différentielles ordinaires sont des cas particuliers des équations aux dérivées partielles. Il suffit, dit *Laplace*, d'égaler à zéro les coefficients des dérivées relatives à l'une des deux variables, y par exemple.

La méthode de *Laplace* suppose que l'on fait disparaître deux des trois premiers termes de l'équation proposée. *Legendre* [2], en étudiant l'équation des surfaces minimums, a été conduit à une méthode nouvelle d'intégration qu'il a pu étendre aux équations non linéaires du second ordre à deux variables indépendantes. Cette question des surfaces minimums avait déjà été traitée par *Monge* [3], qui en a donné une solution remarquable, déduite de considérations géométriques. Peu de temps après [4], *Monge* exposait une méthode d'intégration des équations linéaires du second ordre, méthode abandonnée plus tard, et de laquelle il n'était cependant pas difficile de conclure plusieurs des résultats trouvés longtemps après par *Ampère*.

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*; 1774.

(2) *Ibid.*; 1787.

(3) MONGE, *Application de l'analyse à la géométrie*. — *Mémoires des savants étrangers de l'Académie de Paris*; 1773. — *Miscellanea taurinensia*; 1770-1773.

(4) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*; 1784.

Lagrange a fait faire le plus grand pas à cette théorie (¹), en intégrant les équations du premier ordre à un nombre quelconque de variables. Il est le premier qui, après *Euler*, se soit occupé de l'intégration par les séries (²), méthode appliquée plus tard avec tant de succès par *Poisson* (³). Dans son premier mémoire, *Lagrange* a résolu le problème pour les équations du premier ordre à deux variables indépendantes. Il a montré que, si l'on peut trouver une intégrale du système de trois équations ordinaires du premier ordre, à quatre variables, auquel il ramène le problème, il ne reste plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre à deux variables chacune.

En 1784, *Charpit* présenta à l'Académie des Sciences un mémoire, dans lequel il exposait une méthode d'intégration des équations non linéaires à deux variables indépendantes. Cette méthode consistait à joindre, à l'équation proposée, une autre de la même forme, de manière à en déduire les valeurs des dérivées partielles p, q, puis à intégrer l'expression $dz = pdx + qdy$. *Charpit* étant mort peu de temps après, son travail ne fut pas imprimé. Cependant, on trouve dans plusieurs endroits des applications de sa méthode (⁴). Il l'avait étendue au cas de plusieurs variables indépendantes; mais elle conduit alors à des calculs très-pénibles.

Legendre a aussi donné (⁵) une solution par un changement de variables indépendantes, en prenant, pour variables nouvelles,

(¹) *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*; 1772, 1774, 1779 et 1785.

(²) *Mécanique analytique.*

(³) *Journal de l'École polytechnique*, 13ᵉ cahier. — *Théorie de la chaleur.*

(⁴) Lacroix, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. II, p. 548. Paris; 1814. — Boole, *Ueber eine partielle Differentialgleichung*, Journal de Crelle, t. LXI, p. 323.

(⁵) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*; 1787.

les dérivées p, q, dont x, y, deviennent alors des fonctions. *Pfaff* (1) essaya vainement d'étendre la méthode de *Lagrange* aux équations contenant un nombre quelconque de variables. En suivant une autre route, et, en généralisant la question, il en donna une solution remarquable. Sa méthode porte le nom de *Problème de Pfaff* : elle consiste dans l'intégration de plusieurs systèmes d'équations ordinaires simultanées, dont chacun renferme deux variables de moins que le précédent ; elle a été reprise plus tard par beaucoup de géomètres, entre autres par MM. *Natani* (2) et *Clebsch* (3). Elle a été aussi l'objet des premiers travaux de *Jacobi* (4), qui y apporta quelques simplifications remarquables. Cependant, une étude plus approfondie des équations de la mécanique (5), établies par *Lagrange* (6), et transformées par *Poisson* (7) et *Hamilton* (8), ne tarda pas à faire suivre au géomètre allemand une nouvelle voie : il reconnut que là devait se trouver la solution du problème que ses prédécesseurs n'avaient pu résoudre complétement. *Hamilton* avait montré la connexion qui existe entre l'intégration des équations de la dynamique et l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(1) PFAFF, *Methodus generalis aequationes differentiarum partialium integrandi*, MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BERLIN ; 1814-1815, p. 76.

(2) NATANI, *Ueber totale und partiellen Differentialgleichungen*, JOURNAL DE CRELLE, t. LVIII.

(3) CLEBSCH, *Ueber das Pfaffsche Probleme*, JOURNAL DE CRELLE, t. LIX, LX, LXI et LXV.

(4) JACOBI, *Ueber die Pfaffsche Integrations Methode*, JOURNAL DE CRELLE, tomes II et XVII. — *Journal de M. Liouville*, t. III.

(5) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin ; 1866.

(6) *Mécanique analytique*.

(7) POISSON, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 15e cahier.

(8) HAMILTON, *On a general method in dynamics*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS ; 1834.

Le problème de l'intégration d'un système de $2n$ équations différentielles simultanées auquel est ramené un problème quelconque de mécanique, dépend, d'après *Hamilton* [1], de la recherche d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, dans lesquelles la fonction inconnue figure seulement par ses dérivées partielles. C'était une première étape vers la solution générale de ces deux problèmes. Mais, on le comprend, les magnifiques travaux d'*Hamilton* ne pouvaient être d'une grande utilité. Il fallait le grand génie de *Jacobi* pour élucider cette question. Reprenant les théories d'*Hamilton*, *Jacobi* [2] démontra d'abord qu'il est inutile de former les deux équations aux dérivées partielles du géomètre anglais. Il prouva qu'il suffit de chercher une solution complète d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, équation facile à construire. Mais ce n'était encore qu'une bien faible simplification, car, lorsque l'on voulait intégrer, par la méthode de *Pfaff*, cette équation aux dérivées partielles, on avait à intégrer plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires, dont l'un est précisément le système dynamique primitif. Cependant *Jacobi* montra plus tard qu'il suffit d'intégrer le premier système de *Pfaff*, pour obtenir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles proposée. Mais ce système, comme nous venons de le dire, n'est autre que le système dynamique proposé, et la simplication n'était qu'apparente. Après avoir essayé sans résultat de donner à la méthode de *Pfaff* une forme plus simple, *Jacobi* parvint à une nouvelle méthode d'intégration [3], qui a

[1] HAMILTON, *On a general method in dynamics*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS; 1835, p. 100.

[2] JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*. — J'ai résumé tous ces travaux dans mon *Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique*. Bruxelles; 1871.

[3] JACOBI, *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi*, JOURNAL DE CRELLE, t. LX, p. 1.

renversé toutes les autres; il a réduit le problème à l'intégration de certains systèmes d'équations simultanées linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Il fit connaitre en même temps une méthode remarquable d'intégration de ces systèmes. Il montra qu'il n'est pas nécessaire de connaitre, pour chacun de ces systèmes, l'intégrale générale commune, mais seulement une solution particulière.

De son côté, M. *Georges Boole* (1), professeur à Cork, était arrivé, par une méthode un peu différente, aux mêmes résultats que *Jacobi*. Enfin, *Bour* (2), complétant les travaux remarquables de *Jacobi* sur les équations de la dynamique, et sur les équations aux dérivées partielles, a indiqué la marche à suivre pour trouver l'intégrale complète d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre non linéaires.

En 1819, *Cauchy* (3) avait déjà montré, antérieurement à *Jacobi*, que le problème de *Pfaff* peut se réduire à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires. Il donna plus tard (4) une nouvelle méthode pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. La théorie de *Cauchy* a été exposée et perfectionnée par M. *Serret*, d'abord dans des notes insérées à la fin du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral de Lacroix* (5), puis, dans les *Annales de l'École normale supérieure de Paris* (6). Enfin, tous les travaux de M. *Serret* ont été

(1) BOOLE, *On the differential equations of dynamics*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS; 1863, p. 485.

(2) BOUR, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre*, JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 39e cahier.

(3) *Bulletins de la Société philomatique*; 1819.

(4) CAUCHY, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, EXERCICES D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, t. II, p. 238; 1841.

(5) Tome II, pp. 257 et suiv. Paris; 1861.

(6) Tome III, pp. 143 et suiv.