PROJEKTIVE GEOMETRIE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649090532

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung by Karl Doehlemann

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

KARL DOEHLEMANN

PROJEKTIVE GEOMETRIE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

Trieste

Sammlung Göschen

Projektive Geometrie

in

synthetischer Behandlung

Von

Dr. Karl Doehlemann

Professor an der Universität München

Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage

Neudruck

Mit 91 Figuren

Berlin und Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.

1912

Inhalt.

1*

Die leitenden Gesichtspunkte.

1. Eine prinzipiell strenge Darstellung hat erst für den weiter Fortgeschrittenen Wert. Dem Anfänger ist besser gedient mit einer Behandlung, welche die verschiedenen Seiten des Stoffes zur Geltung bringt. Demgemäß ist die „Projektive Geometrie" nicht rein vom Standpunkte der Geometrie der Lage aus durchgeführt, sondern es wird auch der Begriff des Doppelverhältnisses benutzt. Viele Beweise lassen sich dann auch einfacher durchführen als bei der rein konstruierenden Methode.
2. Auf anschauliche Konstruktionen, sowie konstruktive Durchführung der Figuren und Aufgaben ist jedoch ein Hauptgewicht gelegt.
3. Die Raumgeometrie ist prinzipiell von der ebenen Geometrie nicht zu trennen. Denn die neuere Geometrie soll insbesondere auch das Anschauungsvermögen ausbilden. Dies ist schon erforderlich für die Figuren der ebenen Geometrie, um die Strahlen, Punkte usw. bei ihrer Bewegung zu verfolgen.
4. Für gewisse Begriffe und Beweise muß auf die analytische Geometrie verwiesen werden, so z. B. bei der Ordnung und Klasse einer Kurve. Ebenso erbringt erst die Rechnung die Beweise, daß die durch projektive Grundgebilde erzeugten neuen Gebilde die allgemeinen ihrer Art sind.
5. In dem zu Gebote stehenden Raum konnten nur die wichtigsten und in erster Linie die projektiven Eigenschaften zur Sprache kommen. Metrische Beziehungen bei Kegelschnitten, die Kreispunkte, Brennpunktseigenschaften usw. finden ihre Behandlung ohnedies passender in der analytischen Geometrie.

I. Abschnitt.

Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

§ 1. Die Grundgebilde.

1. Die projektive (neuere, synthetische) Geometrie wurde nach mancherlei Ansätzen aus früherer Zeit in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu einem System ausgebaut und zwar in Frankreich durch Poncelet und Chasles, in Deutschland durch Möbius, Plücker und namentlich durch Steiner und v. Staudt. Von der Geometrie der Alten unterscheidet sich die neuere Geometrie vor allem dadurch, daß sie von gewissen einfachen „Grundgebilden" ausgeht und aus ihnen in einheitlicher, systematischer Weise alle übrigen geometrischen Gebilde ableitet.

Die Grundgebilde erster Stufe.

2. Die „Elemente" der Geometrie sind der Punkt, die Ebene und die Gerade. Diese letztere nennen wir Strahl, wenn sie bloß als Ganzes betrachtet wird. Aus diesen drei Elementen werden die Grundgebilde der neueren Geometrie in folgender Weise zusammengesetzt. Denken wir uns eine unbegrenzte Gerade g, so enthält dieselbe unendlich viele Punkte, die wir uns auf ihr aufgereiht denken, etwa wie Perlen auf einer gerade gespannten Schnur. Die Gerade, aufgefaßt als Inbegriff aller ihrer Punkte, bezeichnen wir als gerade Punktreihe

oder kurz als Punktreihe. Weil die Punkte auf der Geraden angeordnet sind, nennen wir die Gerade den Träger der Punktreihe. Das erzeugende Element der Punktreihe ist also der Punkt.

Durch eine Gerade kann man unendlich viele Ebenen legen, annäherungsweise wie die Blätter eines aufgeschlagenen Buches. Die Gesamtheit der Ebenen, die durch eine Gerade hindurchgehen, nennen wir einen Ebenenbüschel.

Die Gerade heißt der Träger oder die Achse des Ebenenbüschels. Als erzeugendes Element dient in diesem Falle die Ebene.

Nehmen wir endlich eine Ebene ε und in ihr einen Punkt S, so können wir in dieser Ebene unendlich viele Gerade oder Strahlen ziehen, die überdies durch S gehen, ähnlich wie die Speichen eines Rades. Den Inbegriff aller dieser Strahlen nennt man einen Strahlenbüschel. Der Punkt S heißt der Mittelpunkt des Büschels. Als erzeugendes Element ist hier die Gerade, d. h. der Strahl, verwendet.

Die Punktreihe, der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel heißen die Grundgebilde erster Stufe oder die einförmigen Grundgebilde.

Die Grundgebilde zweiter Stufe.

3. Gehen wir aus von einem Punkte S im Raume, so gibt es durch ihn unendlich viele Strahlen und Ebenen. Den Inbegriff aller dieser Elemente bezeichnen wir als Bündel und zwar als Strahlenbündel oder Ebenenbündel, je nachdem wir Strahlen oder Ebenen als Elemente wählen. Der Punkt S heißt der Mittelpunkt des Bündels. Eine Ebene des Strahlenbündels S wird erzeugt durch die Strahlen des Strahlenbüschels, der in dieser Ebene liegt und S zum Mittelpunkt hat. Im Ebenenbündel dagegen ist jeder Strahl aufzufassen als Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen sämtlich dem Bündel angehören. Es enthält demnach der Bündel unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Betrachten wir ferner eine unendlich ausgedehnte Ebene ε mit allen in ihr gelegenen Punkten und Geraden, so nennt man den Inbegriff aller dieser Elemente ein ebenes System oder ein Feld. Wir sprechen von einem Punktfeld oder einem Strahlenfeld, je nachdem wir die Punkte oder die Strahlen im Auge haben. Im Punktfeld sind die einzelnen Geraden aufzufassen als Punktreihen, im Strahlenfeld die einzelnen Punkte als Strahlenbüschel. Das ebene System enthält unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel.

Der Bündel und das ebene System bilden zusammen die beiden Grundgebilde zweiter Stufe. Sie enthalten unendlich viele Grundgebilde erster Stufe.

Das Grundgebilde dritter Stufe.

4. Als Grundgebilde dritter Stufe können wir den ganzen, unendlichen Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Ebenen und Strahlen bezeichnen. Jeder seiner Punkte kann als Mittelpunkt eines Bündels, jede seiner Ebenen als Träger eines ebenen Systems, jeder seiner Strahlen als Achse eines Ebenenbüschels oder als Träger einer Punktreihe genommen werden.

Die Gesamtheit von unendlich vielen, durch irgend ein geometrisches oder analytisches Gesetz definierten Elementen irgendwelcher Art heißt eine Mannigfaltigkeit. Demnach sind die Grundgebilde Mannigfaltigkeiten von Punkten, Ebenen und Strahlen.

Um übrigens schon durch die äußere Form der Darstellung den Überblick über die zu betrachtenden Gebilde zu erleichtern, wollen wir für die geometrischen Elemente eine bestimmte Art der Bezeichnung festhalten. Wir bezeichnen: Punkte durchweg mit großen lateinischen Buchstaben, z. B. A, B, P, S; Gerade oder Strahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben, wie a, b, g; Ebenen endlich stets mit kleinen griechischen Buchstaben, z. B. α, β, ε.

§ 2. Schneiden und Projizieren. Das Gesetz der Dualität.

Die Operation des Schneidens.

5. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, oder eine Gerade und eine nicht durch sie hindurchgehende Ebene liefern einen Schnittpunkt; zwei Ebenen bestimmen eine Schnittgerade. Das neue Schnittelement ist nur dann nicht vorhanden, wenn die gegebenen Elemente parallel sind. Diese spezielle Lage wollen wir zunächst von der Betrachtung ausschließen. In jedem der drei obengenannten Fälle suchen wir ein Element, das den beiden gegebenen Elementen gemeinsam ist. Wir bezeichnen diese Operation als die des Schneidens und müssen sie jetzt auch auf die Grundgebilde ausdehnen.

Betrachten wir einen Strahlenbüschel S (Fig. 1) und eine Gerade g, die in der Ebene des Büschels liegen, aber nicht durch seinen Mittelpunkt hindurchgehen möge, so können wir die Strahlen des Büschels mit g zum Schnitt bringen. Wir erhalten also auf g eine Punktreihe, insofern jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von g mit einem Strahl des Büschels