

**MÉMOIRE SUR  
L'INTÉGRATION GRAPHIQUE  
DES ÉQUATIONS AUX  
DÉRIVÉES PARTIELLES**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649650422

Mémoire sur l'Intégration Graphique des Équations aux Dérivées Partielles by J. Massau

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**J. MASSAU**

**MÉMOIRE SUR  
L'INTÉGRATION GRAPHIQUE  
DES ÉQUATIONS AUX  
DÉRIVÉES PARTIELLES**



64  
374  
.1141

MÉMOIRE  
SUR  
L'INTÉGRATION GRAPHIQUE  
DES  
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR  
J. MASSAU, 1852-1904  
Ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand.



GAND,  
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,  
Rue des Foulons, 4, (près de l'Université).

1900

MÉMOIRE  
SUR  
L'INTÉGRATION GRAPHIQUE  
DES  
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR  
J. MASSAU  
Ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand.

AVANT-PROPOS.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200  
201  
202  
203  
204  
205  
206  
207  
208  
209  
210  
211  
212  
213  
214  
215  
216  
217  
218  
219  
220  
221  
222  
223  
224  
225  
226  
227  
228  
229  
230  
231  
232  
233  
234  
235  
236  
237  
238  
239  
240  
241  
242  
243  
244  
245  
246  
247  
248  
249  
250  
251  
252  
253  
254  
255  
256  
257  
258  
259  
260  
261  
262  
263  
264  
265  
266  
267  
268  
269  
270  
271  
272  
273  
274  
275  
276  
277  
278  
279  
280  
281  
282  
283  
284  
285  
286  
287  
288  
289  
290  
291  
292  
293  
294  
295  
296  
297  
298  
299  
300  
301  
302  
303  
304  
305  
306  
307  
308  
309  
310  
311  
312  
313  
314  
315  
316  
317  
318  
319  
320  
321  
322  
323  
324  
325  
326  
327  
328  
329  
330  
331  
332  
333  
334  
335  
336  
337  
338  
339  
340  
341  
342  
343  
344  
345  
346  
347  
348  
349  
350  
351  
352  
353  
354  
355  
356  
357  
358  
359  
360  
361  
362  
363  
364  
365  
366  
367  
368  
369  
370  
371  
372  
373  
374  
375  
376  
377  
378  
379  
380  
381  
382  
383  
384  
385  
386  
387  
388  
389  
390  
391  
392  
393  
394  
395  
396  
397  
398  
399  
400  
401  
402  
403  
404  
405  
406  
407  
408  
409  
410  
411  
412  
413  
414  
415  
416  
417  
418  
419  
420  
421  
422  
423  
424  
425  
426  
427  
428  
429  
430  
431  
432  
433  
434  
435  
436  
437  
438  
439  
440  
441  
442  
443  
444  
445  
446  
447  
448  
449  
450  
451  
452  
453  
454  
455  
456  
457  
458  
459  
460  
461  
462  
463  
464  
465  
466  
467  
468  
469  
470  
471  
472  
473  
474  
475  
476  
477  
478  
479  
480  
481  
482  
483  
484  
485  
486  
487  
488  
489  
490  
491  
492  
493  
494  
495  
496  
497  
498  
499  
500  
501  
502  
503  
504  
505  
506  
507  
508  
509  
510  
511  
512  
513  
514  
515  
516  
517  
518  
519  
520  
521  
522  
523  
524  
525  
526  
527  
528  
529  
530  
531  
532  
533  
534  
535  
536  
537  
538  
539  
540  
541  
542  
543  
544  
545  
546  
547  
548  
549  
550  
551  
552  
553  
554  
555  
556  
557  
558  
559  
560  
561  
562  
563  
564  
565  
566  
567  
568  
569  
570  
571  
572  
573  
574  
575  
576  
577  
578  
579  
580  
581  
582  
583  
584  
585  
586  
587  
588  
589  
590  
591  
592  
593  
594  
595  
596  
597  
598  
599  
600  
601  
602  
603  
604  
605  
606  
607  
608  
609  
610  
611  
612  
613  
614  
615  
616  
617  
618  
619  
620  
621  
622  
623  
624  
625  
626  
627  
628  
629  
630  
631  
632  
633  
634  
635  
636  
637  
638  
639  
640  
641  
642  
643  
644  
645  
646  
647  
648  
649  
650  
651  
652  
653  
654  
655  
656  
657  
658  
659  
660  
661  
662  
663  
664  
665  
666  
667  
668  
669  
670  
671  
672  
673  
674  
675  
676  
677  
678  
679  
680  
681  
682  
683  
684  
685  
686  
687  
688  
689  
690  
691  
692  
693  
694  
695  
696  
697  
698  
699  
700  
701  
702  
703  
704  
705  
706  
707  
708  
709  
710  
711  
712  
713  
714  
715  
716  
717  
718  
719  
720  
721  
722  
723  
724  
725  
726  
727  
728  
729  
730  
731  
732  
733  
734  
735  
736  
737  
738  
739  
740  
741  
742  
743  
744  
745  
746  
747  
748  
749  
750  
751  
752  
753  
754  
755  
756  
757  
758  
759  
760  
761  
762  
763  
764  
765  
766  
767  
768  
769  
770  
771  
772  
773  
774  
775  
776  
777  
778  
779  
780  
781  
782  
783  
784  
785  
786  
787  
788  
789  
790  
791  
792  
793  
794  
795  
796  
797  
798  
799  
800  
801  
802  
803  
804  
805  
806  
807  
808  
809  
810  
811  
812  
813  
814  
815  
816  
817  
818  
819  
820  
821  
822  
823  
824  
825  
826  
827  
828  
829  
830  
831  
832  
833  
834  
835  
836  
837  
838  
839  
840  
841  
842  
843  
844  
845  
846  
847  
848  
849  
850  
851  
852  
853  
854  
855  
856  
857  
858  
859  
860  
861  
862  
863  
864  
865  
866  
867  
868  
869  
870  
871  
872  
873  
874  
875  
876  
877  
878  
879  
880  
881  
882  
883  
884  
885  
886  
887  
888  
889  
890  
891  
892  
893  
894  
895  
896  
897  
898  
899  
900  
901  
902  
903  
904  
905  
906  
907  
908  
909  
910  
911  
912  
913  
914  
915  
916  
917  
918  
919  
920  
921  
922  
923  
924  
925  
926  
927  
928  
929  
930  
931  
932  
933  
934  
935  
936  
937  
938  
939  
940  
941  
942  
943  
944  
945  
946  
947  
948  
949  
950  
951  
952  
953  
954  
955  
956  
957  
958  
959  
960  
961  
962  
963  
964  
965  
966  
967  
968  
969  
970  
971  
972  
973  
974  
975  
976  
977  
978  
979  
980  
981  
982  
983  
984  
985  
986  
987  
988  
989  
990  
991  
992  
993  
994  
995  
996  
997  
998  
999  
1000

Revue 7-1-1889

Nous nous proposons d'exposer, dans ce mémoire, une méthode d'intégration graphique des équations aux dérivées partielles et de résoudre, par ce moyen, les problèmes du mouvement varié des eaux courantes et de la poussée des terres. Nous avons déjà, en 1889 (1), publié le principe de notre méthode dans les termes suivants : « On se donne des courbes arbitraires et, s'il y a lieu, des dérivées le long de ces courbes; on détermine les éléments de proche en proche. Les discontinuités des courbes arbitraires se propagent suivant les caractéristiques de Monge. Dans le mouvement varié des eaux courantes, ces caractéristiques représentent le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde d'amont, l'onde d'aval; l'onde devient finie quand il y a mascaret. Dans la poussée des terres, ces caractéristiques divisent le massif en régions; une des régions se trouve sous l'influence du mur de soutènement; une autre se trouve dans les mêmes conditions que si le massif était indéfini. Ces recherches feront l'objet d'un mémoire spécial. »

(1) V. *Annales des Ingénieurs sortis des Écoles de Gand* (t. XII, p. 433).

Dans le tome XXII des *Annales des Ing. de Gavt* (1) a paru un article intitulé : « Résolution de deux questions sur le mouvement varié des eaux. » Nous lisons dans cet article que « ce problème défie les plus savants analystes. » Un seul travail antérieur y est cité ; c'est « un travail qui a paru en 1877, aux *Annales des Ponts et Chaussées de France*, et où l'auteur discute longuement certaines propriétés des courbes de débit d'une rivière en crue, sans toutefois en dégager des conséquences qui puissent conduire au tracé des axes hydrauliques en mouvement varié ». Il n'est pas fait mention de notre méthode que l'auteur de l'article précité devait connaître, nous avons les meilleures raisons de le croire. Mais, quoi qu'il en soit à cet égard, l'auteur de la « Résolution », s'il s'est appuyé sur l'intégration par éléments en partant des courbes arbitraires, n'a pas rencontré le seul point important de nos recherches : la propagation des discontinuités suivant les caractéristiques de Monge, et nous croyons que, sans utiliser cette propriété, il n'est pas possible de résoudre, même approximativement, les problèmes de mécanique appliquée qui dépendent d'équations aux dérivées partielles.

La « résolution de deux questions du mouvement varié » repose sur l'application répétée du problème suivant : on donne l'axe hydraulique à l'instant  $t$ , trouver l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$ . On part du niveau d'aval supposé connu ; on essaie une valeur du débit ; on détermine de proche en proche les éléments du nouvel axe hydraulique et la variation de débit, au moyen de l'équation du mouvement varié et de l'équation de continuité. L'axe hydraulique définitif s'obtiendra par tâtonnements ; la valeur d'essai du débit ne sera exacte que si l'on trouve dans la section supérieure le débit déterminé par le diagramme de la crue. Il résulte de là que les circonstances d'amont et d'aval exercent leur influence sur toute l'étendue du nouvel axe hydraulique. Supposons le mouvement permanent établi à l'instant  $t$  où la crue commence ; quelque petit que soit  $\Delta t$ , on trouvera à l'instant  $t + \Delta t$ , un nouvel axe hydraulique complètement différent du premier, de telle sorte que la première manifestation de la crue se propage instantanément dans toute la longueur de la rivière. Cela nous paraît inadmissible.

Les tâtonnements dont il vient d'être question nous paraissent également très discutables. Dans tous les problèmes de dynamique, on peut toujours calculer directement les différentielles, et, approximativement, les accroissements des fonctions inconnues ; cela tient à la forme même des équations de la dynamique qui sont linéaires par

(1) 1<sup>re</sup> liv. pp. 1 à 19.

rapport aux différentielles des vitesses. Cela est vrai pour le mouvement des systèmes matériels, pour le mouvement des solides et même pour les mouvements tourbillonnaires des liquides et des gaz. Il n'y a jamais de tâtonnements que quand il s'agit de trouver une position d'équilibre, un mouvement uniforme, un mouvement permanent, parce que la nature elle-même n'atteint ces solutions particulières qu'après des espèces d'hésitations : oscillations ou convergences. Nous comprenons très bien que la détermination de l'axe hydraulique du mouvement permanent donne lieu à des tâtonnements, parce qu'il s'agit d'une solution théorique qui ne se produit peut-être jamais dans la nature. Mais si quelques orages éclatent dans la partie supérieure du bassin d'un grand fleuve, nous comprenons difficilement que, pour déterminer l'effet immédiat du commencement de la crue provoquée par ces orages, on soit obligé de se livrer à des tâtonnements où l'on ferait intervenir toutes les résistances, depuis la mer jusqu'à la région où la crue se produit.

Avant de chercher les erreurs de principe, nous exposerons d'abord succinctement comment on peut, selon notre manière de voir, résoudre approximativement le problème du mouvement varié. Ce problème

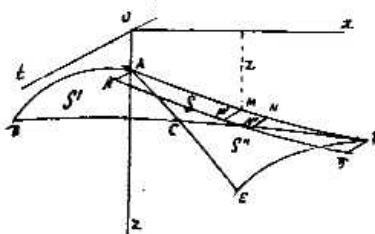


Fig. 1.

comporte deux fonctions inconnues : la cote d'eau  $z$  et la vitesse  $u$  en un point  $M$  de la rivière ; les variables indépendantes sont l'abscisse  $x$  du point  $M$  et le temps  $t$ . Ces deux fonctions inconnues satisfont à deux équations aux dérivées partielles. Si on porte le temps suivant un axe  $o t$  perpendiculaire au profil en long, l'axe hydraulique engendre une surface qui représente la fonction  $z$  et que nous appellerons la surface hydraulique ; on représentera de même la fonction  $u$  par la surface des vitesses. Donnons-nous l'axe hydraulique initial  $AB$  et les vitesses correspondantes ; on sait, par le théorème de Cauchy, que l'intégrale analytique est complètement déterminée. On peut très facilement trouver cette intégrale par la formule de Taylor ; en un point  $M$  de l'axe initial, on connaît les fonctions  $z$  et  $u$  et toutes leurs dérivées par rapport à  $x$  ; au moyen des deux équations aux dérivées partielles, on tirera

$$\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}$$



et en différentiant ces deux équations par rapport aux deux variables, on reconnaît sans peine que l'on peut calculer aussi les dérivées d'ordre quelconque. On peut alors écrire le développement de Taylor.

L'intégration par éléments en partant de l'axe initial permet évidemment d'obtenir cette même intégrale analytique. Ayant déterminé au point M les dérivées premières, on obtiendra approximativement les accroissements par les formules approchées

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t, \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

Du point M, on déduira le point M'; de l'axe AB à l'instant  $t$ , on déduira l'axe A'B' à l'instant  $t + \Delta t$ . On trouvera de même les axes hydrauliques aux instants suivants et, par conséquent, la surface hydraulique S. Mais cette intégrale analytique, déterminée uniquement par l'axe initial, suppose que cet axe est prolongé indéfiniment dans les deux sens, sans aucune discontinuité dans les dérivées d'ordre quelconque. Si, au contraire, on donne arbitrairement les diagrammes des cotes d'eau dans les sections A et B, on introduit les discontinuités dans les courbes arbitraires; ce sont ces discontinuités qui vont se propager suivant les caractéristiques.

Considérons d'abord un problème plus simple : construire une surface passant par un polygone curviligne CABD, et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

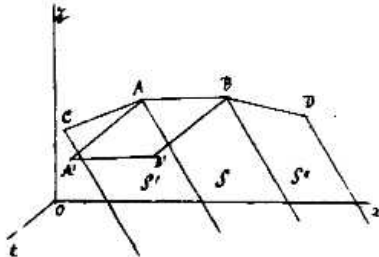


Fig. 2.

En partant de la ligne AB, on trouvera, soit par la formule de Taylor, soit par l'intégration par éléments, une surface analytique ABB'A'. Mais la courbe AB n'est pas prolongée analytiquement; la courbe arbitraire présente des angles en A et B; que va-t-il se passer? Nous pouvons répondre immédiatement à cette question, parce que l'équation proposée est l'équation des cylindres dont la génératrice est parallèle à la bissectrice de l'angle  $x \circ t$ . L'intégrale cherchée se compose des surfaces S', S, S'' commandées respectivement par les arcs CA, AB et BD; on voit que les discontinuités de la courbe arbi-

traire se propagent suivant les génératrices du cylindre, et que chaque sommet de la courbe arbitraire donne naissance à une arête. Ce sont ces génératrices qui sont les caractéristiques de l'équation proposée.

Les équations du mouvement varié forment un système de deux équations linéaires à deux fonctions inconnues. Comme nous l'avons annoncé dans notre résumé, il y a deux systèmes de caractéristiques, représentant le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde d'amont, l'onde d'aval; de telle sorte que s'il y a un sommet dans l'axe hydraulique initial, ce sommet donnera naissance à deux arêtes de la surface hydraulique. En particulier, les angles A et B (fig. 1.) donneront naissance aux arêtes AC et CB; la surface hydraulique comprendra une surface S commandée par l'axe initial, une surface S' qui dépend des circonstances d'amont, une surface S'' qui dépend des circonstances d'aval. Mais les arêtes ACE et BCD ne sont pas les seules; l'axe hydraulique initial est souvent décomposé en éléments rectilignes pour la facilité des calculs; les diagrammes qui déterminent les circonstances d'amont et d'aval ne sont pas des diagrammes analytiques, mais des polygones; toutes les discontinuités se propagent suivant les caractéristiques, qui divisent la surface hydraulique en triangles et quadrangles. La surface hydraulique est donc une surface analogue à un polyèdre; les faces sont curvilignes, les arêtes sont des caractéristiques.

On peut conclure de là que le procédé d'intégration par éléments que nous avons exposé plus haut et qui convient à une surface analytique, ne peut plus être employé; car on peut prouver qu'il revient à calculer les profils en travers par la formule de Taylor, et on ne peut pas calculer un polygone curviligne en appliquant la formule de Taylor au premier côté. Il n'y a qu'un moyen d'intégrer approximativement, c'est de déterminer de proche en proche les triangles et quadrangles limités par les caractéristiques; ce n'est qu'en appliquant de cette manière l'intégration par éléments que l'on rencontrera des arcs analytiques auxquels on pourra appliquer les formules d'intégration approchée.

On remarquera que cette méthode n'est pas sujette aux objections que nous avons formulées précédemment. Toutes les particularités des diagrammes des circonstances d'amont et d'aval se propagent, non instantanément, mais progressivement avec la vitesse d'une onde infiniment petite; cela est conforme au sentiment des choses de l'hydraulique. Tous les éléments de la surface hydraulique sont déterminés directement, et il n'y a aucun tâtonnement qui met en dépendance instantanée des éléments situés à grande distance; cela est conforme aux sentiments des choses de la dynamique.

Pour examiner de plus près la méthode de calcul employée dans la « Résolution », appliquons-la à un seul élément MN de l'axe hydraulique à l'instant  $t$ ; on trouvera l'élément correspondant M'N' de l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$  de la manière suivante : il y a quatre inconnues à déterminer, la cote d'eau et la vitesse aux points M' et N'; on donne une condition à l'amont et une condition à l'aval; on écrit deux équations aux différences approchées déduites des deux équations aux dérivées partielles et le problème est déterminé.

On voit par cet exposé que cette méthode repose sur des raisonnements qui ont toutes les apparences de la logique. On n'y trouve qu'une seule hypothèse; pour établir les équations aux différences approchées, on admet que les variations de la cote d'eau, de la vitesse, du débit dans une section, pendant l'intervalle  $\Delta t$ , sont représentées par des éléments rectilignes. C'est cette hypothèse que nous contestons. En effet, il s'agit alors d'une solution analytique, sans discontinuité, et en vertu du théorème de Cauchy, cette solution est complètement déterminée par l'axe initial, et il n'est pas possible d'introduire les conditions d'amont et d'aval. Il est facile de voir comment, dans la « Résolution », on a pu résoudre, en apparence, ce problème impossible. Nous avons vu que pour chaque point M de l'axe hydraulique, à l'instant  $t$ , on peut écrire deux équations aux différences approchées qui déterminent la cote d'eau et la vitesse au point M' de l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$ ; on peut donc écrire quatre équations pour l'élément M'N'; or, on n'a écrit que deux équations aux différences approchées; il y a donc deux équations qui manquent. On peut ainsi introduire les conditions d'amont et d'aval, mais les équations du mouvement varié ne sont plus satisfaites. Nous arrivons au même résultat si nous considérons un axe hydraulique divisé en plusieurs segments; on peut déterminer complètement le nouvel axe hydraulique en écrivant deux équations pour chaque sommet; on n'a écrit que deux équations pour chaque segment; il y a encore deux équations qui manquent et que l'on remplace par les conditions d'amont et d'aval. Nous voyons alors comment s'introduisent les tâtonnements que nous avons déclarés suspects; ils servent à répartir sur l'axe hydraulique tout entier les erreurs commises aux deux extrémités.

Pour terminer, considérons les diagrammes des hauteurs, des débits et des vitesses de la planche I annexée à la « Résolution ». Nous voyons que toutes ces quantités varient à partir de l'instant où la crue commence dans la section supérieure. On passe instantanément dans toute l'étendue de la rivière du régime permanent au régime varié. C'est ce que nous n'admettons pas. Ainsi, par exemple, nous croyons que la