EXERCISES ET LEÇONS D'ANALYSE

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649155378

Exercises et leçons d'analyse by R. Adhémar

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

R. ADHÉMAR

EXERCISES ET LEÇONS D'ANALYSE

Trieste

EXERCICES ET LEÇONS

D'ANALYSE

PAR

R. D'ADHÉMAR.

QUADRATURES. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.
ÉQUATIONS INTÉGRALES DE M. FREDHOLM ET DE M. VOLTERRA.
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

PRÉFACE.

J'ai essayé d'écrire ce petit Livre dans le but d'être utile aux élèves des Universités.

Certes, il ne manque pas de beaux *Traités* ou *Cours* d'Analyse. En quelques points, très modestement, je cherche seulement à les compléter un peu, et c'est ce que je dois expliquer ici.

Il me semble d'abord que les étudiants, ceux surtout qui travaillent seuls, n'auront jamais trop de Livres d'Exercices. J'indique donc la solution de problèmes, presque tous posés à l'examen du Certificat de Calcul différentiel et intégral.

D'autres exercices sont fournis par les *transcendantes classiques*, qu'on rencontre incidemment dans beaucoup de recherches, et qu'il faut savoir manier.

Comme le faisait M. Painlevé, dans le Chapitre qu'il a annexé aux *Exercices* de Tisserand, je rappelle, au début, l'énoncé de quelques théorèmes importants, en tâchant d'être précis, et en m'efforçant de ne pas tomber dans cet excès de subtilité que M. H. Poincaré, au Congrès des Mathématiciens de 1908, a nommé le *Cantorisme*.

Voilà pour la première Partie, *très élémentaire*, de ce Livre.

En second lieu, j'esquisse le contour de quelques Leçons, sur des sujets dont l'étude est récente.

Par là même, ces questions, aujourd'hui en pleine évolution, n'étaient pas encore aptes à figurer dans les grands Ouvrages classiques.

Il me semble qu'elles pourront intéresser les étudiants dont l'esprit est curieux, et voici le point de vue auquel je me suis placé.

Dans la Théorie générale des fonctions, il faut partir de la série de Taylor et faire un prolongement analytique avec Weierstrass, ou bien il faut prendre pour point de départ le problème de Dirichlet, avec Riemann. Sinon, toute la théorie de Cauchy est comme suspendue en l'air.

Sans cela, par exemple, on ne peut introduire dans l'intégrale de Cauchy que les *trancendantes élémentaires*, e^z, $\mathrm{L}z$, arc tang z, etc.

J'ai choisi le principe de Dirichlet, parce qu'il conduit naturellement à une théorie très belle, celle de M. Fredholm, et aux équations de la Physique. Je parle donc des *équations intégrales*, dont chacun reconnaît aujourd'hui l'importance.

La solution du problème de Dirichlet va d'ailleurs faire réfléchir un étudiant, par le fait qu'à première vue il lui semblera qu'on est en contradiction avec l'énoncé du théorème d'existence classique, dit *théorème de Cauchy-Kowalesky*, sur les solutions des équations aux dérivées partielles. Mais c'est qu'un *contour fermé* ne correspond plus du tout à la démonstration de ce théorème classique.

Et voici donc un avertissement suggestif : un énoncé, très général et très beau, n'épuise pas forcément une question. Il est bien d'autres théorèmes d'existence que ceux de Cauchy (¹). D'ailleurs, des cas très intéressants peuvent se présenter où cet énoncé tombe en défaut.

Cela nous amènera à la théorie des *caractéristiques*, définies précisément comme *multiplicités d'exception* relativement au théorème de Cauchy.

Et la théorie des caractéristiques nous conduit à la classification des équations du second ordre, en types *elliptiques, hyperboliques, paraboliques*.

L'équation de Laplace est du type elliptique; nous indiquons, après la théorie du potentiel, la solution qui résulte de l'œuvre de M. Fredholm. Puis nous parlons de certaines équations du type hyperbolique, linéaires et complètement intégrées; en particulier, ceci nous permettra de montrer la valeur de deux idées qui, dans cet ordre, se rejoignent constamment et se complètent : la *Méthode de Riemann* et les *Approximations successives de M. É. Picard*.

Enfin, on a, à ce jour, assez peu de résultats très généraux sur le type parabolique. C'est encore une équation intégrale qui semble devoir jouer ici un rôle important. Nous donnons donc simplement, à ce sujet, une étude rapide du célèbre *problème d'inversion d'Abel* et des équations intégrales de M. Volterra.

Mon but sera atteint si j'ai amené quelques jeunes étudiants à réfléchir sur quelques-unes des hautes ques-

---

(¹) *Voir* les *Conférences* de M. Picard et la *Notice sur les travaux de M. Hadamard*. Paris, Gauthier-Villars.

tions que pose le Cours classique de la Licence ès Sciences mathématiques, si j'ai réussi à montrer des *faits* intéressants, et si j'ai ainsi aiguisé la curiosité de quelque lecteur.

M. Émile Picard a bien voulu me permettre d'user, pour ma rédaction, de ses belles Leçons, qui sont toujours un régal pour l'auditoire. J'ai largement profité de l'autorisation, en ce qui concerne les équations de M. Fredholm et de M. Volterra.

Il m'est agréable de dire à mon maître, à cette occasion, mon affectueuse et respectueuse reconnaissance.

Septembre 1908.

EXERCICES ET LEÇONS

D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

Rappelons quelques formules importantes et quelques théorèmes fondamentaux.

I. — Géométrie.

Courbe plane. Rayon de courbure :

$$y = y(x), \qquad \mathrm{R} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad \mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Courbe gauche. Formules de Frenet-Serret :

$$x(s), \quad y(s), \quad z(s), \qquad (s = \text{arc}),$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= dy\, d^2z - dz\, d^2y \\ \mathrm{B} &= dz\, d^2x - dx\, d^2z \\ \mathrm{C} &= dx\, d^2y - dy\, d^2x \end{aligned}\right\} \quad \delta = \| dx \quad d^2x \quad d^3x \| \quad (^1),$$

$$\mathrm{R} = \text{rayon de courbure}, \qquad \mathrm{T} = \text{rayon de torsion}.$$

Cosinus de la tangente : α, β, γ.
Cosinus de la normale principale : α', β' γ'.

---

[1] Ce symbole représente un déterminant dont on n'écrit que la première ligne.

Cosinus de la binormale : α'', β'', γ'',

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^6}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{\delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \ldots$$

Courbes tracées sur une surface :

1° Lignes de courbure : les normales à la surface le long de ces lignes forment une développable, ou bien le rayon de courbure est maximum (ou minimum);

2° Lignes asymptotiques : le plan osculateur est le plan tangent de la surface;

3° Lignes géodésiques : le plan osculateur est normal à la surface.

Coordonnées curvilignes. — La théorie des surfaces comporte l'emploi des coordonnées curvilignes

$$x(u, v); \quad y(u, v); \quad z(u, v),$$

$$ds^2 = \mathbf{S}\, dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(carré de différentielle, non différentielle du carré),

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

$$EG - F^2 = H^2 > 0.$$

Angle des directions d et δ :

$$\cos(ds, \delta s) = \mathbf{S}\, \frac{dx}{ds}\, \frac{\delta x}{\delta s}$$

$$= \frac{E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v}{\sqrt{E\, du^2 \ldots}\, \sqrt{E\, \delta u^2 \ldots}}.$$