INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SUIVANT LA METHODE DE H. GRASSMAN

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649773312

Introduction a la geometrie differentielle suivant la methode de H. Grassman by C. Burali-Forti

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

C. BURALI-FORTI

INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SUIVANT LA METHODE DE H. GRASSMAN

Trieste

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
24635 Quai des Grands-Augustins, 55.

INTRODUCTION

A LA

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

SUIVANT LA MÉTHODE DE H. GRASSMANN,

PAR

Cesare
C. BURALI-FORTI,
PROFESSEUR A L'ACADÉMIE MILITAIRE DE TURIN.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

PRÉFACE.

Le livre que nous publions aujourd'hui contient une brève exposition du *Calcul géométrique* et plusieurs de ses applications à la *Géométrie différentielle élémentaire*.

Le calcul géométrique a été deviné par Leibniz (1679) [1] qui, le premier, reconnut l'opportunité, ou plutôt la nécessité, d'opérer directement sur les éléments géométriques, tandis que la Géométrie analytique opère sur des nombres qui ont une relation indirecte avec les éléments qu'ils représentent. Mais l'opération géométrique, introduite par Leibniz, n'a pas les propriétés ordinaires des opérations algébriques ; aussi l'auteur n'a-t-il pu pousser bien loin les recherches géométriques.

Toutefois, l'idée de Leibniz était destinée à se répandre et à produire de grands résultats. Caspar Vessel [2] donna, en 1797, une représentation analytique de la direction qui contient la représentation géométrique des nombres complexes d'Argand (1806) et plusieurs des opérations introduites par Hamilton (1843-1853) avec les Quaternions. Möbius, avec le *Calcul barycentrique* (1827-1842) et Bellavitis avec la mé-

---

(1) LEIBNITZENS, *Math. Schriften*, t. II et V. Berlin; 1849.

(2) *Essai sur la représentation analytique de la direction* (*Om Directionens analytiske Betegning*). Publié par l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark, à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie, le 10 mars 1797. Copenhague, 1897.

thode des *Équipollences* (1832-1854), donnent deux méthodes de calcul géométrique, indépendantes entre elles, que les auteurs ci-dessus appliquent à plusieurs questions de Géométrie pure et de Mécanique. En 1843, Hamilton publie un premier essai de la théorie des *Quaternions*, et cette théorie, développée complètement en 1854, donne un calcul géométrique complet qui fut bientôt connu, apprécié et appliqué même par les contemporains d'Hamilton; on l'applique, aujourd'hui, spécialement à la Physique.

Les œuvres d'Hamilton sont précédées de l'*Ausdehnungslehre*, de H. Grassmann (1844), qui, par la puissance et la simplicité des opérations, surpasse tous les autres calculs géométriques. La forme d'exposition, excessivement abstraite, adoptée par Grassmann, a retardé la diffusion de l'*Ausdehnungslehre*, de sorte qu'aujourd'hui on emploie le calcul barycentrique, la théorie des équipollences, ou les quaternions, et plus souvent encore la géométrie cartésienne, pour résoudre des questions géométriques qui ont une solution fort simple avec la méthode de Grassmann. Les applications, faites par Grassmann, à la génération des lignes et des surfaces firent bientôt entrevoir la puissance de la méthode; mais il fallait encore à celle-ci, pour qu'elle fût connue et appliquée par tout le monde, un trait d'union concret avec la géométrie d'Euclide.

Le professeur Peano a été le premier qui ait donné une interprétation géométrique concrète des formes et des opérations de l'*Ausdehnungslehre*. Prenant pour point de départ l'idée commune de tétraèdre, il définit le produit de deux et de trois points; il définit ensuite les produits de ces éléments par des nombres, et, enfin, il définit les sommes de ces produits. La théorie des formes du premier ordre donne le calcul barycentrique et celui des vecteurs (ou directions);

les formes du deuxième ordre représentent les droites, les orientations et les systèmes des forces appliquées à un corps rigide; les formes du troisième ordre représentent les plans et le plan à l'infini. Parmi les opérations, les produits progressifs et régressifs donnent les opérations géométriques *projecter, couper;* le produit interne donne les projections orthogonales et les quantités qu'on désigne, en Mécanique, par les mots *ouvrage, moment....*

Nous donnons dans ce livre, sous la forme concrète et très simple que nous venons d'exposer, les éléments du calcul géométrique suivant la méthode de Grassmann. Le but que nous nous sommes proposé est de donner aux jeunes étudiants le moyen d'apprendre aisément ce puissant instrument de calcul, et de leur donner, en même temps, le moyen de l'appliquer aux questions de la Géométrie différentielle supérieure.

Nous croyons ce dernier but de notre Ouvrage fort important. En effet, on obtient, dans la Géométrie différentielle ordinaire, des propriétés bien simples avec des développements très compliqués. Cette complication est due, en général, à l'emploi des coordonnées, car avec les coordonnées nous faisons des transformations algébriques sur des nombres pour obtenir, d'après des calculs bien souvent fort compliqués, une petite formule, une *invariante*, qui est susceptible d'une interprétation géométrique. Le calcul géométrique ne fait point usage des coordonnées; il opère directement sur les éléments géométriques, et chaque formule, qui est par elle-même une invariante, a une signification géométrique bien simple qui conduit très aisément à la représentation graphique de l'élément considéré. On peut donc prévoir une simplification vis-à-vis des méthodes ordinaires. Notre Ouvrage prouve que la simplification est possible à l'égard de la Géométrie différentielle élémentaire, et laisse aux jeunes étudiants un vaste champ de transformations et de recherches pour la Géométrie supérieure.

L'importance du rôle que l'*Ausdehnungslehre* a en Géométrie, en Mécanique et en Physique, est bien expliquée par M. V. Schlegel dans son important Ouvrage historique *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre...* (¹) auquel nous renvoyons le lecteur. Aujourd'hui la méthode de Grassmann n'a pas besoin d'être recommandée; elle n'a besoin que d'être connue et appliquée par tout le monde : c'est par l'application *constante* à toutes les parties de la Mathématique qu'on peut comprendre la puissance et la simplicité de la méthode de Grassmann.

Turin, avril 1897.

(¹) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Leipzig; 1896.

TABLE DES MATIÈRES.