ÜBER DIE LÖSUNG DER UNBESTIMMTEN PROBLEME ZWEITEN GRADES; PP. 1-129

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649778270

Über die Lösung der Unbestimmten Probleme Zweiten Grades; pp. 1-129 by Joseph Louis Lagrange & Eugen Netto

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

JOSEPH LOUIS LAGRANGE & EUGEN NETTO

ÜBER DIE LÖSUNG DER UNBESTIMMTEN PROBLEME ZWEITEN GRADES; PP. 1-129

Trieste

Alexander Ziwet

Über

die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades

von

Joseph Louis Lagrange

(1768)

Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben

von

Eugen Netto
in Gießen

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1904

Über die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades

von

Joseph Louis Lagrange.

[377] *) Ein Problem heißt unbestimmt, falls die Schlußgleichung, auf die die Lösung einer Aufgabe führt, mehr als eine Unbekannte enthält; im allgemeinen gibt es dann eine unendliche Anzahl von Lösungen. Wenn aber die Natur der Frage fordert, daß die gesuchten Größen rationale oder gar ganze Zahlen seien, so kann die Anzahl der Lösungen eine sehr beschränkte werden; die Schwierigkeit liegt darin, unter allen möglichen Lösungen die zu finden, die der vorgeschriebenen Bedingung genügen. Ist die Schlußgleichung vom ersten Grade, so folgt die Rationalität aller Lösungen aus der Natur dieser Gleichung selbst; fordert man dabei weiter, daß die Unbekannten ganze Zahlen seien, so kann man sie leicht nach der Methode der Kettenbrüche bestimmen (vgl. Nr. 8). Anders, wenn die Schlußgleichungen von höherem als dem ersten Grade sind; denn solche führen ihrer Natur nach auf irrationale Ausdrücke. Man kennt keine direkte und allgemeine Methode zur Auffindung kommensurabler Zahlen, die solchen Gleichungen genügen, selbst wenn sie nur vom zweiten Grade sind; **[378]** und man muß zugeben, daß dieser hochwichtige Zweig der Analysis von den Mathematikern vernachlässigt worden ist, oder zum mindesten, daß sie in ihm nur geringe Fortschritte zu verzeichnen haben.

Freilich haben *Diophant* und seine Erklärer eine große Anzahl unbestimmter Aufgaben vom zweiten, dritten und selbst vom vierten Grade gelöst; allein ihre Lösungen sind meist nur

*) Diese und die entsprechenden eingeklammerten Zahlen geben die Seiten der französischen Abhandlung im zweiten Bande der »Œuvres de Lagrange, publiées par J.-A. Serret, Paris 1868.«

auf Einzelfälle zugespitzt; deshalb ist es auch nicht erstaunlich, daß sich die Behandlung eben so einfacher wie allgemeiner Fälle den Methoden des *Diophant* völlig entzieht.

Wenn es sich z. B. darum handelt, unter der Voraussetzung, daß A und B ganze, nicht quadratische Zahlen sind, die Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ zu lösen, oder mit anderen Worten, wenn man einen rationalen Wert t suchen soll, der $A + Bt^2$ zu einem Quadrate macht, so überzeugt man sich leicht davon, daß alle, aus der »Analysis« des *Diophant* bekannten Kunstgriffe hierfür versagen. Nun reduziert sich aber, wie man später sehen wird, gerade auf diesen Fall die allgemeine Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Meines Wissens hat sich niemand außer *Euler* mit dieser Frage beschäftigt. *Euler* behandelt sie in zwei vorzüglichen Abhandlungen,[1] die sich in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie finden (Commentarii Acad. VI [1738] p. 175 und Novi Commentarii IX [1764] p. 3). Aber durch sie ist der Stoff bei weitem nicht erschöpft. Denn 1. hat *Euler* bei der Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ nur den Fall betrachtet, wo B positiv ist, und t, u ganzzahlig sind; 2. setzt *Euler* in diesem Falle noch voraus, man kenne schon eine Lösung der Gleichung, und gibt eine Methode, um aus dieser bekannten Lösung eine unendliche Menge anderer Lösungen herzuleiten. Dabei hat dieser große Mathematiker nicht etwa versucht, auch Regeln zu geben, nach denen man von vornherein erkennen könne, ob die vorgelegte Gleichung lösbar sei oder nicht; sondern abgesehen davon, daß seine Regeln nur auf zweifelhaften Boden gegründet und nur induktiv hergeleitet sind, bieten sie für die Auffindung der als bekannt angesehenen ersten Lösung keinen Nutzen (vgl. insbesondere den Schluß der zweiten oben angeführten Abhandlung p. 38); 3. liefern die *Euler*schen Formeln, mit deren Hilfe aus einer Lösung unendlich viele hergeleitet werden können, nur dann alle möglichen Lösungen, wenn A eine Primzahl ist (vgl. Nr. **45**).

[379] Die Untersuchungen, die ich seit einiger Zeit über diesen Gegenstand angestellt habe, führten mich zu direkten, allgemeinen und neuen Methoden, Gleichungen von der Form $A + Bt^2 = u^2$ und allgemein jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten zu lösen, sei es, daß die Unbekannten ganze oder gebrochene Zahlen sein dürfen, sei es, daß sie ganze Zahlen sein müssen. Diese Methoden bilden den Gegenstand der folgenden Abhandlung. Ich halte sie der Aufmerksamkeit der Mathematiker für wert, um so mehr als sie späteren Untersuchungen noch ein weites Feld offen lassen.

§ I. Über die Art, jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten auf die Form $A = u^2 - Bt^2$ zu bringen, und über die Fälle, in denen Gleichungen von dieser Form durch bekannte Methoden lösbar sind.

1. Sei

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

die vorgelegte allgemeine Gleichung; in ihr seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gegebene ganze positive oder negative Zahlen (wären sie gebrochen, so könnte man sie stets durch Multiplikation der Gleichung mit ihrem Hauptnenner zu ganzen Zahlen machen); x und y seien die beiden zu bestimmenden Unbekannten, die rationale Zahlen werden sollen. Löst man diese Gleichung nach einer der Unbekannten, etwa nach x auf, so findet man

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \sqrt{(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \zeta)}$$

und hat die Frage dahin umgewandelt, y so zu bestimmen, daß $(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \zeta)$ ein Quadrat wird. [380] Zur Abkürzung bezeichnen wir

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = B, \quad \beta\delta - 2\alpha\varepsilon = f, \quad \delta^2 - 4\alpha\zeta = g;$$

dann muß $By^2 + 2fy + g$ ein Quadrat werden. Wir setzen also

$$By^2 + 2fy + g = t^2,$$

und die Auflösung dieser Gleichung ergibt

$$By + f = \sqrt{Bt^2 + f^2 - Bg};$$

es handelt sich also nur noch darum, $Bt^2 + f^2 - Bg$ zu einem Quadrate zu machen. Wir setzen weiter

$$f^2 - Bg = A$$

und haben nun die Aufgabe darauf zurückgeführt, der Gleichung

$$A + Bt^2 = u^2,$$

in der A und B gegebene ganze Zahlen sind, durch rationale Größen t und u zu genügen.

2. Da wir

$$(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \zeta) = By^2 + 2fy + g = t^2,$$
$$Bt^2 + f^2 - Bg = Bt^2 + A = u^2$$

gesetzt haben, so folgt

$$2\alpha x + \beta y + \delta = \pm t, \quad By + f = \pm u;$$
$$y = \frac{\pm u - f}{B}, \quad x = \frac{\pm t - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(\pm u - f)}{2\alpha B},$$

wobei die Zeichen $\pm$ bei t und bei u beliebig genommen werden können. Hat man also t und u gefunden, so liefern die letzten Formeln die Werte von x und y.

[381] Man sieht zugleich, daß wenn x und y ganze Zahlen sein sollen, t und u es auch sein müssen; außerdem ist dazu nötig, daß $(\pm u - f)$ durch B und daß $\left(\pm t - \delta - \frac{\beta(\pm u - f)}{B}\right)$ durch 2α teilbar sei. Fordert man nur, daß x und y rationale Zahlen seien, so reicht es aus, daß t und u rational werden.

3. Ist eine der Zahlen A oder B ein Quadrat, so läßt sich die Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ nach den Methoden des *Diophant* behandeln.

I. Ist $B = b^2$, so setzen wir $u = bt + x$; die Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ wird dadurch zu

$$A = 2btx + x^2,$$

und hieraus erhält man den Wert

$$t = \frac{A - x^2}{2bx}.$$

Für x kann man irgendwelche Zahl nehmen. Sollten jedoch t und u ganzzahlig sein, so dürfte man für x nur solche ganze Zahlen wählen, für die $(A - x^2)$ durch $2bx$ teilbar ist. Die Bestimmung solcher Zahlen könnte lang und schwierig werden, und so beachten wir lieber, daß aus $A + b^2t^2 = u^2$ folgt

$$A = u^2 - b^2t^2 = (u + bt)(u - bt).$$

Daraus ersieht man zunächst, daß $(u + bt)$ und $(u - bt)$ Faktoren der gegebenen Zahl A sind. Man hat also die Zahl A nur auf alle möglichen Arten in zwei Faktoren zu zerlegen und kann mit ihrer Hilfe t und u bestimmen. Unter all den Werten von t und u, die die einzelnen Faktorenpaare liefern, wählen wir die ganzzahligen t und u aus und kommen auf diese Weise zu allen ganzzahligen Lösungen der vorgelegten Gleichung.

[382] II. Ist $A = a^2$, so setzen wir $u = a + tx$; die Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ wird dadurch zu

$$Bt^2 = 2atx + t^2x^2;$$

hebt man t weg und berechnet dann t, so erhält man:

$$t = \frac{2ax}{B - x^2},$$

wo man für x jede beliebige Zahl nehmen kann. Sollen t und u ganzzahlig werden, so muß x ganzzahlig und so beschaffen sein, daß $2ax$ durch $(B - x^2)$ teilbar wird. Man könnte zunächst $x = 0$ annehmen, woraus $t = 0$, $u = a$ folgen würde; aber um eine allgemeine Lösung zu erhalten, formt man die Gleichung $a^2 + Bt^2 = u^2$ in

$$Bt^2 = u^2 - a^2 = (u + a)(u - a)$$

um und ersieht daraus, daß $(u + a)$ und $(u - a)$ Faktoren von Bt^2 sind. Wir setzen $B = b \cdot \beta$, wo also b und β Faktoren von B werden; dann kann man t und u aus den Annahmen

$$u + a = bt, \quad u - a = \beta t$$

bestimmen; diese liefern

$$2a = (b - \beta)t, \quad t = \frac{2a}{b - \beta}.$$

Die vorgelegte Gleichung ist also, wenigstens nach dieser Methode, nur dann in ganzen Zahlen lösbar, wenn $2a$ durch $(b - \beta)$ teilbar ist. Ich sage: »nach dieser Methode«; denn es ist klar, daß die Annahme $u + a = bt$, $u - a = \beta t$ nicht allgemein ist, sondern daß man unter der Voraussetzung $t = p \cdot q$ auch

$$u + a = bp^2, \quad u - a = \beta q^2$$

setzen kann; daraus folgt

$$2a = bp^2 - \beta q^2,$$

eine Gleichung, die offenbar wieder unter den allgemeinen Fall von Nr. **1** gehört.

[**383**] Die besprochenen Methoden sind die einzigen, die man bisher besaß, Gleichungen von der Form $A + Bt^2 = u^2$ aufzulösen. Sie sind nur auf Fälle anwendbar, wo A oder B Quadrate sind; in allen anderen Fällen war man auf einfaches Probieren angewiesen, ein Verfahren, das nicht nur lang und

mühsam, sondern beinahe unausführbar ist, falls die gesuchten Größen nicht in endliche Grenzen eingeschlossen werden können. Dieser Fall tritt nur bei positivem A und negativem B ein; denn da u^2 ganz und positiv sein soll, so muß $Bt^2 < A$ und folglich $t < \sqrt{A:B}$ sein. Man hat also nur für t alle positiven Zahlen einzusetzen, die kleiner als $\sqrt{A:B}$ sind; die negativen einzusetzen ist unnötig, da die Quadrate einander entgegengesetzter Größen $+t$ und $-t$ denselben Wert t^2 annehmen; dann hat man die Zahlen t auszuwählen, die $A - Bt^2$ zu einem Quadrate machen. Anders ist es bei positivem B, weil dabei t ins Unendliche wachsen kann. Und im allgemeinen wird, bei positivem wie bei negativem B, die Anzahl der nötigen Versuche unendlich groß werden, sobald man für die Lösung gebrochene Zahlen zuläßt. Das zeigt aufs deutlichste die Notwendigkeit, für diese Probleme Lösungsmethoden zu besitzen, wie wir sie im folgenden geben.

§ II. Auflösung der Gleichung $A = u^2 - Bt^2$, wenn u und t ganze oder gebrochene Zahlen sein können.

4. Wir nehmen an, u und t seien Brüche, die auf denselben Nenner gebracht und dabei durch möglichst kleine Zahlen ausgedrückt worden sind, so daß man $u = \frac{p}{r}$, $t = \frac{q}{r}$ hat, wo p, q, r keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Dann geht die Gleichung

$$A + Bt^2 = u^2 \quad \text{oder} \quad A = u^2 - Bt^2$$

über in

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2.$$

[384] Die Aufgabe ist also in die umgewandelt, ganze Zahlen p, q, r zu finden, die die letzte Gleichung befriedigen.

Wir können annehmen, daß weder A noch B einen quadratischen Faktor enthält. Wäre nämlich $A = a\varrho^2$, $B = b\omega^2$, so ginge die Gleichung in

$$a\varrho^2 r^2 = p^2 - b\omega^2 q^2$$

und diese für $\varrho r = m$, $\omega q = n$ in

$$am^2 = p^2 - bn^2$$

über, d. h. in eine Gleichung von derselben Form wie die obige.