ÜBER DIE BILDUNG DES FORMENSYSTEMS DER TERNÄREN BIQUADRATISCHEN FORM. INAUGURAL-DISSERTATION

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649778249

Über die Bildung des Formensystems der Ternären Biquadratischen Form. Inaugural-Dissertation by Emmy Noether

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

EMMY NOETHER

ÜBER DIE BILDUNG DES FORMENSYSTEMS DER TERNÄREN BIQUADRATISCHEN FORM. INAUGURAL-DISSERTATION

Trieste

19

Alexander Zirek

Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.

275

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt

von

Emmy Noether

aus Erlangen.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 1907.

Berlin

Druck von Georg Reimer

1908.

Lebenslauf.

Ich, Amalie Emmy Noether, bayerischer Staatsangehörigkeit und israelitischer Konfession, bin am 23. März 1882 zu Erlangen geboren, als Tochter des Kgl. Universitätsprofessors Dr. Max Noether und seiner Ehefrau Ida, geb. Kaufmann. Nach Ablegung der bayr. Prüfungen für Lehrerinnen der französischen und der englischen Sprache studierte ich von 1900 bis 1902 als Hörerin an der Universität Erlangen, erwarb 1903 das Absolutorium des Kgl. Realgymnasiums Nürnberg, verbrachte das Wintersemester 1903/04 in Göttingen und war seit Herbst 1904 in Erlangen immatrikuliert.

Meine Lehrer waren in Erlangen die Herren Professoren: Gordan, Noether, Wiedemann, Wehnelt, Reiger, Pirson, Fester, Fischer; in Göttingen: Hilbert, Klein, Minkowski, Blumenthal, Schwarzschild. Ihnen allen bin ich für wissenschaftliche Förderung zu Dank verpflichtet; meinen besonderen Dank spreche ich Herrn Geh. Hofrat Gordan aus für die Anregung zu vorliegender Arbeit und für sein Interesse während ihrer Durchführung.

Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*).

Einleitung.

Mit dem Formensystem der ternären biquadratischen Form beschäftigen sich Arbeiten von *Gordan*, *Maisano* und *Pascal***). Herr *Gordan* stellt das vollständige, aus 54 Bildungen bestehende, Formensystem der speziellen automorphen Form: $f \equiv x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ unter Zugrundelegung ähnlicher Prinzipien auf, wie er sie für die Formensysteme im binären Gebiet gegeben hat.

Bei Herrn *Maisano* sind für die allgemeine biquadratische Form die Formen bis zur 5. Ordnung***) einschließlich aufgestellt, sowie einige Invarianten, Kovarianten und Kontravarianten höherer Ordnung, nach der von Herrn *Gordan* in Band I der Math. Annalen für die ternäre kubische Form angewandten Methode. Herr *Pascal* beschäftigt sich, unter Benutzung

---

*) Ein kurzer Auszug aus Einleitung und Kapitel I ist in den „Sitzungsber. der phys.-med. Sozietät Erlangen 1907", S. 176 bis 179, erschienen.

**) *P. Gordan*, über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (Math. Annalen, Bd. XVII (1880), S. 217—233.)

G. Maisano, 1) Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl' invarianti, covarianti o contravarianti di sesto grado. (Giorn. di Battaglini XIX.)

2) Sui covarianti indipendenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria. (Rend. Circ. Mat. di Palermo I, 1887.)

E. Pascal, Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. (Memoria premiata dalla R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. 1905.)

***) Unter „Ordnung" soll die Dimension in den Koeffizienten, unter „Grad" die in den Variablen verstanden werden.

der *Maisano*schen Resultate, hauptsächlich mit der Frage nach dem Zerfallen der biquadratischen Form in Faktoren*).

*Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Aufstellung des Formensystems für die allgemeine ternäre biquadratische Form; und zwar werden in dieser Arbeit nur die Hauptgrundlagen gegeben, ein sogenanntes „relativ vollständiges System“**) aufgestellt.*

Die Arbeit schließt sich eng an die *Gordan*sche Arbeit an; doch waren die dort nur ganz im allgemeinen gegebenen Prinzipien erst im einzelnen auszuarbeiten. Mit Hilfe eines Satzes über den Zusammenhang der Faltungen und durch Einführung der „Formenreihe“ (§ 1) werden die Reduktionssätze scharf formuliert und vervollständigt (§ 3), während die rekurrierende Aufstellung spezieller Reihenentwicklungen (§ 2) das rechnerische Mittel zur wirklichen Durchführung der Reduktionen gibt.

Der Grundgedanke der Systembildung ternärer Formen ist derselbe wie im binären Gebiet. Ausgehend von einem ersten relativ vollständigen System — dem System der aus dem Binären übernommenen Formen —, gelangt man nach bestimmter Gesetzmäßigkeit zu Systemen mit immer höherem Modul, solange bis das System eines Moduls — der Modul als Grundform genommen — endlich und bekannt wird, oder auch bis ein Modul sich reduzieren läßt auf Formen, die Invarianten zum Faktor haben. Durch Überschiebung des relativ vollständigen Systems über das System des Moduls entsteht im ersten Fall das absolut vollständige System, während im zweiten Fall relativ vollständiges und absolut vollständiges System identisch werden. Infolge der durch Herrn *Hilbert* allgemein bewiesenen Endlichkeit der Formensysteme muß dies Verfahren notwendig zu einem Abschluß führen.

In unserm Fall wird der Modul (abc) des ersten relativ vollständigen Systems (§ 4) zurückgeführt auf die Moduln $\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2$ und $\nu = (abu)^4$

*) In der zweiten kurzen Note versucht Herr *Maisano* eine lineare Abhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades nachzuweisen. Im Gegensatz zu diesem nicht ganz vollständigen Beweis glaubt Herr *Pascal* die lineare Unabhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung, ebenso wie diejenige der drei Invarianten 9. Ordnung bewiesen zu haben. Daß aber in der Tat eine lineare Relation zwischen den drei Kovarianten einerseits, den drei Invarianten andererseits existiert, zeigen die Formeln (13), § 11 und (22), § 17 Anmerkung, der vorliegenden Arbeit, wo diese Relationen explizit gegeben sind. Nach einer Mitteilung des Herrn *Pascal* erklärt sich der Widerspruch durch einen numerischen Fehler im Ausdruck seiner Kontravariante p (hier ρ genannt) S. 46 seiner Abhandlung.

**) Für die Bezeichnung vgl. § 3a.

(§ 5), und sodann das relativ vollständige System mod ν gefunden (§ 6). Diese Resultate sind schon in der *Gordan*schen Arbeit für die allgemeine biquadratische Form gegeben; unsere Art der Ableitung läßt sich jedoch leichter auf Formen höheren Grades übertragen.

Als Reihe der Moduln wählen wir nun die Formen (§ 7):

$$\nu, \quad \nu(\nu)=(\nu\nu_1 x)^4=s_x^4, \quad \nu(s)=(ss'u)^4, \ldots .$$

Bei der Bildung des relativ vollständigen Systems mod s werden zwei im System auftretende quadratische Formen, u_ϱ^2 und t_x^2, als Moduln adjungiert (§ 9 und 10) und demzufolge das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t) gebildet; es wird sodann gezeigt (§ 17), daß der Modul $(ss'u)^4$ reduzibel ist auf die Moduln ϱ und t. Dadurch geht das nächsthöhere System über in ein relativ vollständiges System mod (ϱ, t). Da aber das simultane System zweier quadratischen Formen endlich und bekannt ist, im allgemeinen Fall aus 20 Bildungen besteht*), ist mit der Aufstellung des relativ vollständigen Systems mod (ϱ, t) der oben gekennzeichnete Abschluß erreicht. Die Überschiebung dieses Systems über das System von (ϱ, t) zur Bildung des absolut vollständigen Systems bleibt vorbehalten.

Als relativ vollständiges System mod (ϱ, t) werden 331 Bildungen gefunden, die in der beigefügten Tabelle nach ihrem Grad in den Variablen x und u geordnet sind.

Zum Schluß geben wir noch eine Übersicht über die eingeführten Symbole:

$f=a_x^4, \quad \theta=\theta_x^4 u_\vartheta^2=(abu)^2 a_x^2 b_x^2, \quad K=K_x^6 u_k^3=(a\theta u)\, u_\vartheta^2 a_x^3 \theta_x^3, \quad j=u_j^6=(a\theta u)^4 u_\vartheta^2,$

$\Delta=\Delta_x^6=a_\vartheta^2 u_x^2 \theta_x^4=(abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad N=N_x^8 u_n=(a\Delta u)\, a_x^3 \Delta_x^5,$

$\nu=u_\nu^4=(abu)^4, \quad H=H_x^2 u_\eta^4=(\nu\nu_1 x)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2, \quad L=L_x^3 u_l^6=(\nu\eta x)\, H_x^2 u_\nu^3 u_\eta^3,$

$g=g_x^6=(\nu\eta x)^4 H_x^2, \quad \sigma=u_\sigma^6=H_\nu^2 u_\nu^2 u_\eta^4,$

$s=s_x^4=(\nu\nu_1 x)^4, \quad Z=Z_x^4 u_\zeta^2=(ss'u)^2 s_x^2 s_x'^2,$

$\varrho=u_\varrho^2=\theta_\nu^4 u_\vartheta^2, \quad t=t_x^2=a_\eta^4 H_x^2,$

$i=a_\nu^4, \quad J=s_\nu^4.$

*) Vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie. (Bd. I, S. 288 ff.). System zweier kogredienter Formen.

Gordan, Über Büschel von Kegelschnitten. (Math. Ann. Bd. XIX. S. 530). System zweier kontragredienter Formen.