

**DIE BEDEUTUNG DER PANGEOMETRIE.
MIT BEZUG AUF DEN AUFSATZ: "UEBER
DEN URSPRUNG UND DIE BEDEUTUNG
DER GEOMETRISCHEN AXIOME, VON
HELMOLTZ, BERLIN, APRIL 1876"**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649769247

Die Bedeutung der Pangeometrie. Mit Bezug Auf den Aufsatz: "Ueber den Ursprung und die Bedeutung der Geometrischen Axiome, von Helmholtz, Berlin, April 1876" by Schmitz-Dumont

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

SCHMITZ-DUMONT

**DIE BEDEUTUNG DER PANGEOMETRIE.
MIT BEZUG AUF DEN AUFSATZ: "UEBER
DEN URSPRUNG UND DIE BEDEUTUNG
DER GEOMETRISCHEN AXIOME, VON
HELMOLTZ, BERLIN, APRIL 1876"**

Die Bedeutung
der
PANGOMETRIE.

Mit Bezug auf den Aufsatz:
„Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen
Axiome, von Helmholtz, Berlin, April 1876.“

Von
Schmitz-Dumont.

Mit Holzschnitt im Text.

LEIPZIG,

Verlag von Erich Koeschay (L. Helmann's Verlag)

1877.

2,35

~~V. 2, 18.~~

Math 5038.77.2
v 5850.77

1878, June 4.
Minot fund.

INHALT.

-
- I. Wahrnehmen und Vorstellen.
 - II. Methode des Verstandes und empirische Wissenschaft.
 - III. Der analytische Ausdruck für den Begriff „Entfernung.“
 - IV. Das Parallelenaxiom.
 - V. Deutung analytischer Formen.
-

I.

Kant war durch die kritische Untersuchung der Verstandesthätigkeit zu dem Resultate gelangt, dass Zeit und Raum Formen unserer menschlichen Auffassungsweise von Wesenheiten seien, deren innere Natur uns unerkennbar sei. Die weitere Frage, wie es nun komme, dass wir jene Wesenheiten als Erscheinungen grade oder einzig unter diesen beiden Formen auffassen oder anschauen, und warum diese die charakteristische Eigenschaft haben, als Zeit in einer, als Raum in drei Dimensionen aufzutreten, liess er unerörtert; ja es ist fraglich, ob er eine weitere Herleitung dieser Eigenschaften überhaupt für möglich hielt. Zeit und Raum mit ihren charakteristischen Eigenschaften stellten sich ja dar als Specifica der menschlich organisirten Wesen, deshalb schien die Möglichkeit offen zu bleiben, dass andere hypothetische mit Vernunft begabte Wesen auch andere Anschauungsformen haben könnten. Als in den mathematischen Wissenschaften nun die Aufgabe in Angriff genommen wurde, den Zusammenhang der Grundaxiome in der beliebten Form des algebraischen Beweises herzustellen, gelang dies nicht, und man glaubte schliesslich den Grund dieses Misslingens in jener Kant'schen Ansicht zu finden, dass hier eben Eigenthümlichkeiten unserer mundanen Welt vorlägen, die also durch Erfahrung aufzusuchen und zu ordnen seien; die aber für andere vernünftige, d. h. diskursiv denkende Wesen, oder andere äussere Welten, als die unsrige eben ist, auch ganz anders gestaltet sein dürften. Während nun in der früheren Mathematik die Algebra nur als Hilfsmittel gebraucht worden war, um die Anschauungen der Geometrie in Zahlenschemata zu bringen, zu berechnen, ging dieselbe in der neueren Mathematik als logisches Denken selbständig zur

weiteren Aufstellung von Formeln vor, unbekümmert darum, ob diese Formeln noch eine Bedeutung in unserer objektiven Welt hätten. Ja nachdem unsere objektive Welt sich darstellte als ein Einzelfall jenes algebraischen Schematismus, glaubte man in der Analyse das Instrument gefunden zu haben, welches die Formen aller denkmöglichen Welten ergebe, wovon unsere in drei Dimensionen ausgedehnte Welt eben ein Spezialfall sei.

Alle Argumente für diese Ansicht neuerer Analytiker fasst nun Helmholtz in dem obigen ansprechenden Vortrage zusammen und wollen wir deren Gewicht der Reihe nach untersuchen. Hierbei wird selbstverständlich überall die algebraische Richtigkeit der Originalarbeiten anerkannt, welche zu diesen Argumenten führten; nur die begrifflichen Schlüsse aus diesen analytischen Resultaten werden von den durch Helmholtz gezogenen abweichend ausfallen.

„Die Geometrie, sagt H., nennt solche Sätze, welche sie als unbeweisbar erklärt, aber deren Richtigkeit ein jeder gesunde Verstand zugeben muss, Axiome (z. B. dass durch zwei Punkte nur eine gerade Linie gezogen werden könne etc.)“, und er stellt mit Recht die absolute Wahrheit eines Satzes dem kritischen Denken gegenüber in Zweifel, so lange kein besserer Grund, als die bisherige Annahme eines gesunden Verstandes sich aufweisen lasse. Mit derselben Berechtigung muss man jedoch auch der Behauptung der bisherigen Geometrie: „Jene Sätze seien unbeweisbar“, die absolute Wahrheit absprechen. Was die Geometrie nach ihren heutigen Methoden nicht beweisen kann, ist deshalb noch nicht unbeweisbar für jede mögliche Methode; die heutige Geometrie ist in diesem Sinne verschieden von der vergangenen und der zukünftigen. Soll jene Behauptung der heutigen Geometrie von entscheidendem Gewichte sein, so muss sie in Form des logischen Beweises aufgestellt und anerkannt werden.

Im Verfolge nun führt H. aus, dass wir unsere geometrischen Anschauungen, die wir gemeinlich als Denknöthwendigkeiten ansehen, auf der Annahme freier Beweglichkeit fester Raumgebilde mit unveränderter Form nach jeder Stelle des Raumes aufbauen; und er wirft dieser Annahme gegenüber die ganz berechtigte Frage auf, ob dieselbe nicht eine unerwiesene Voraussetzung einschliesse. In dem letzteren Falle, schliesst er, sei der Congruenzbeweis eine nur aus der Erfahrung genommene Thatsache. Das letztere ist nicht ganz richtig. Jene unerwiesene

Voraussetzung, wenn eine solche überhaupt stattfand, muss als unerweisbar nachgewiesen werden können, wenn der Schluss richtig sein soll. Es kann sehr wohl aus der Erfahrung durch wiederholte Beobachtung sich die Annahme eines Verhältnisses, eines Gesetzes historisch beim Menschen festsetzen, welches Gesetz sich später durch logisches Denken als eine Denknothwendigkeit ergibt.

Doch diese Ausstellung an der Schlussweise von H. ist für das spätere Resultat nicht von Bedeutung, denn er sucht hierdurch nur darzulegen, dass die algebraische Methode der geometrischen bei diesen Untersuchungen vorzuziehen sei, weil sich in jener die Gefahren einer unerweisbaren oder unerwiesenen Voraussetzung vollständig vermeiden lassen; denn sie ist eine rein logische Operation, ein schematisches Darstellen des diskursiven Denkens.

Um nun einigermaassen eine Anschauung der hier wesentlichen Punkte zu geben, zugleich auch ein einfacheres, leichter überschaubares Gebiet, setzt H. die Hypothese einer Welt von zwei Dimensionen folgenderweise:

„Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und sich bewegen. Wir nehmen an, dass sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas ausserhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber Wahrnehmungen, ähnlich den unsrigen, innerhalb der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen. Wenn sich solche Wesen ihre Geometrie ausbilden, so würden sie ihrem Raume natürlich nur zwei Dimensionen zuschreiben. Sie würden ermitteln, dass ein Punkt, der sich bewegt, eine Linie beschreibt, und eine Linie, die sich bewegt, eine Fläche, was für sie das vollständigste Raumbilde wäre, was sie kennen. Aber sie würden sich ebensovienig von einem weiteren räumlichen Gebilde, was entsteht, wenn eine Fläche sich aus ihrem flächenhaften Raume herausbewegte, eine Vorstellung machen können, als wir es können von einem Gebilde, das durch Herausbewegung eines Körpers aus dem uns bekannten Raume entsteht. Unter dem viel gemissbrauchten Ausdrucke: „sich vorstellen“ oder „sich denken können, wie etwas geschieht“, verstehe ich — und ich sehe nicht, wie man etwas anderes darunter verstehen könne, ohne allen Sinn des Ausdrucks anzugeben — dass man sich die Reihe der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne, die man haben

„würde, wenn so etwas in dem einzelnen Falle vor sich
 „ginge. Ist nun gar kein sinnlicher Eindruck bekannt, der
 „sich auf einen solchen nie beobachteten Vorgang bezöge,
 „wie für uns eine Bewegung nach einer vierten, für jene
 „Flächenwesen eine Bewegung nach der uns bekannten
 „dritten Dimension des Raumes wäre, so ist ein solches
 „Vorstellen“ nicht möglich, ebensowenig als ein von
 „Jugend auf absolut Blinder sich wird die Farben vorstellen
 „können, wenn man ihm auch eine begriffliche Beschreibung
 „derselben geben könnte. Jene Flächenwesen würden ferner
 „auch kürzeste Linien in ihrem flächenhaften Raume ziehen
 „können. Das wären nicht nothwendig gerade Linien in
 „unserem Sinne, sondern was wir nach geometrischer Ter-
 „minologie geodätische Linien jener Fläche nennen wür-
 „den; Linien, wie sie ein gespannter Faden beschreibt,
 „den man an die Fläche anlegt, und der ungehindert an
 „ihr gleiten kann.“

Diese Folgerungen oder vielmehr Behauptungen, welche an jene Hypothese einer Welt von zwei Dimensionen geknüpft werden, sind meiner Ansicht nach unrichtig; die Hypothese selbst einstweilen als eine Möglichkeit zugegeben, obschon ich glaube, nachweisen zu können, dass in einer solchen Welt die Annahme von Sinneswahrnehmungen bei solchen Wesen nicht zulässig ist. Doch hierauf kommt es nicht an. Den principiellen Fehler sehe ich darin, dass H. wahrnehmen und vorstellen in ein äquivalentes Verhältniss setzt.

Die Vorstellung eines Dinges ist keine schwache Wiederholung der Wahrnehmung, sondern: nach unseren Wahrnehmungen, nach den Sinnesreizungen, welche ein Ding auf uns ausübt, bilden wir in unserem Geiste eine Vorstellung von der Gestalt und den Eigenschaften des Dinges. Die Vorstellung ist eine Fiktion unseres Denkens von oder über jenes Ding. Um deutlicher zu sprechen:

Wenn wir ein Gemälde betrachten, so sind es immer einzelne Punkte, welche wir fixiren, nicht eine kontinuierliche Fläche; und wenn wir auch noch so oft die Punkte wechseln, so werden wir doch in Summa nur eine grosse Anzahl von Einzelpunkten wahrgenommen haben, nicht eine kontinuierliche Fläche; aber zu dieser Vielheit von wahrgenommenen Punkten fingirt das diskursive Denken die Fläche, bildet die Vorstellung Fläche. Die gewöhnliche Beobachtung wird dies allerdings in Frage stellen,

jedoch der Physiolog weiss, dass die wahrnehmende Netzhaut unseres Auges nicht eine kontinuierliche Fläche, sondern ein diskontinuierliches Netz von wahrnehmenden Nerven ist, also auch keine Fläche direkt wahrgenommen, sondern nur zu den vielen Wahrnehmungen hinzugedacht, d. h. vorgestellt wird. Klarer wird dies, wenn wir an die Blinden denken. Dieselben besitzen zur Wahrnehmung von der Gestalt eines Körpers nur den Tastsinn. Niemand wird nun behaupten, dass das Betasten eines Körpers andere, als diskontinuierliche Wahrnehmung einzelner Stellen des Körpers zulässt. Nichtsdestoweniger bildet der Blinde die Vorstellung des kontinuierlichen Körpers; die Vorstellung: Fläche, kontinuierlicher Körper, ist also nur zum Theil bewirkt durch seine Wahrnehmungen, zum andern Theile aber Produkt seines diskursiven Denkens.

Wir können aber den Unterschied von Wahrnehmen und Vorstellen auch in entgegengesetzter Richtung entwickeln.

Wir betrachten ein polirtes Stück Glas und sagen: dasselbe wird von uns wahrgenommen als ein kontinuierliches Ganzes, denn der vorher beschriebene Prozess, unter welchem wir diese Vorstellung erzeugen, ist uns in dem gewöhnlichen Leben nicht beständig gegenwärtig; es ist ein unbewusster Denkprozess geworden.

Durch Verbindung dieser direkten Wahrnehmung (wie wir glauben) mit unseren Beobachtungen chemisch-fysikalischer Natur machen wir den Schluss, dass diese Wahrnehmung eines kontinuierlichen Körpers falsch sei. Zuerst konstatiren wir Porosität, nachher sogar ausser den Poren der Körpertheile auch noch leere Räume zwischen den Atomen. Die Summe aller Wahrnehmungen können wir nicht anders zu einer widerspruchsfreien Erklärung vereinigen, als indem wir annehmen, dass der Körper aus Molekeln oder in letzter Instanz Atomen, welche durch leere Zwischenräume getrennt sind, zusammengesetzt sei, und diese letztere Erklärung bezeichnet die konsequent sein wollende Induktion als eine aus der Erfahrung geschöpfte Thatsache. Was ist aber der wirkliche Thatbestand? Wir haben zweimal unsere sinnlichen Wahrnehmungen, also unsere Erfahrungen, als falsch erklärt; das erstemal, indem wir unsere Einzelwahrnehmungen desavouirten und statt deren die Vorstellung eines kontinuierlichen Körpers durch unsere Denkhätigkeit bildeten; sodann indem wir diese Vorstellung, welche durch die Ge-