ÜBER DIE ANZAHL DER IDEAL-CLASSEN IN DEN VERSCHIEDENEN ORDNUNGEN EINES ENDLICHEN KÖRPERS

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649778232

Über die Anzahl der Ideal-Classen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers
by Richard Dedekind & Carl Friedrich Gauss & Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

RICHARD DEDEKIND & CARL FRIEDRICH GAUSS &
TECHNISCHE HOCHSCHULE CAROLO-WILHELMINA ZU BRAUNSCHWEIG

ÜBER DIE ANZAHL DER IDEAL-CLASSEN IN DEN VERSCHIEDENEN ORDNUNGEN EINES ENDLICHEN KÖRPERS

Trieste

FESTSCHRIFT

ZUR

SAECULARFEIER DES GEBURTSTAGES

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DARGEBRACHT

VOM

HERZOGLICHEN COLLEGIUM CAROLINUM

ZU

BRAUNSCHWEIG.

ÜBER DIE

ANZAHL DER IDEAL-CLASSEN

IN DEN

VERSCHIEDENEN ORDNUNGEN EINES ENDLICHEN KÖRPERS.

VON

RICHARD DEDEKIND.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND PAPIER VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1877.

ÜBER DIE

ANZAHL DER IDEAL-CLASSEN

IN DEN

VERSCHIEDENEN ORDNUNGEN EINES ENDLICHEN KÖRPERS.

INHALT.

Die erhabenen Schöpfungen von CARL FRIEDRICH GAUSS haben die Bewunderung der Mathematiker dieses Jahrhunderts vor Allem deshalb erregt, weil sie in fast beispielloser Weise die Wissenschaft mit einer ausserordentlichen Fülle ganz neuer Gedanken befruchtet und vorher gänzlich unbekannte Felder zum ersten Male der Forschung erschlossen haben. Im höchsten Maasse gilt dies von Gauss' Entdeckungen im Gebiete der höheren Arithmetik, die ihn nach seinem eigenen Ausspruche das ganze Leben hindurch vor allen anderen Theilen der Mathematik gefesselt hat. Mit der Theorie der Kreistheilung ist von ihm nicht bloss der Grund zu einem neuen Theile der Mathematik gelegt, welcher von der algebraischen Verwandtschaft der Zahlen handelt, sondern sie hat auch das erste und bis jetzt noch immer fruchtbarste Beispiel des innigen Zusammenhangs zwischen der höheren Algebra und der Zahlentheorie geliefert, welche bis dahin zwei vollständig getrennte Gebiete gebildet hatten. In der nächsten Beziehung zu dieser Erweiterung der Grenzen der Wissenschaft steht der kühne Gedanke, den Begriff der ganzen Zahl durch die Einführung der ganzen complexen Zahlen von seiner bisherigen Beschränkung zu befreien, wodurch Gauss abermals der arithmetischen Forschung ein heute noch unermessliches Feld eröffnet hat. Aber es ist nicht bloss dieser wunderbare Reichthum an neuen Gedanken und grossen Entdeckungen, durch welchen Gauss sein Wirken auf allen von ihm beschrittenen Gebieten der Wissenschaft für alle Zeiten bezeichnet hat, sondern es steht diesem vollständig ebenbürtig die Tiefe der Methoden gegenüber, durch welche er die grössten Schwierigkeiten überwunden und die verborgensten Wahrheiten, die *mysteria numerorum*, in das hellste Licht gesetzt hat. Es genügte seinem stets auf das Grosse und auf die zukünftige Entwicklung der Wissenschaft blickenden Geiste nicht, einen Beweis gefunden und damit die Wahrheit ausser Zweifel gesetzt zu haben, sondern er kehrte, wie er selbst so eindringlich beschreibt, unablässig zu den schon überwundenen Schwierigkeiten zurück, in der Hoffnung, durch erneute Anstrengungen neue Waffen zu gewinnen, welche eine über das unmittelbar vorliegende Ziel weit hinausreichende Tragweite besässen. Und so ist es gekommen, dass dieselben von Gauss erdachten Methoden unmittelbar oder mit geringen Modificationen auch bei der Behandlung von ähnlichen, aber allgemeineren Problemen sich als vollständig ausreichend erweisen. Diese schon oft als ein besonders charakteristisches Kennzeichen der Gedankentiefe von Gauss hervorgehobene Erscheinung an einem neuen Beispiele zu bestätigen, ist der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung, welche dem Andenken des grossen Mathematikers gewidmet ist.

Die Theorie der binären quadratischen Formen, zu deren Entstehung einige Sätze von *Fermat* die Veranlassung gegeben haben, verdankt ihre Begründung den hervorragenden Arbeiten von *Euler* und *Lagrange,* aber sie ist erst von Gauss durch die in der fünften Section der Disquisitiones Arithmeticae niedergelegten Untersuchungen zu einem wissenschaftlichen Ganzen gestaltet, und namentlich hat sie durch die daselbst zum ersten Male behandelte Lehre von der Composition der Formen die höchste Bereicherung erhalten. Unter den Anwendungen, welche Gauss von dieser neuen Theorie gemacht hat, ist eine der bemerkenswerthesten die Bestimmung des *Verhältnisses* der Classen-Anzahlen der Formen, welche zu zwei verschiedenen *Ordnungen* derselben Determinante D gehören; bezeichnet man mit $h(D)$ die Classen-Anzahl für diejenige Ordnung der Determinante D, welche nur primitive Formen (und zwar entweder nur die eigentlichen oder nur die uneigentlichen) enthält, so kommt diese Aufgabe darauf hinaus, für zwei gegebene, in quadratischem Verhältniss stehende, Determinanten D und D' das Verhältniss $h(D) : h(D')$ zu ermitteln. Die aus der Theorie der Composition der Formen geschöpfte Beantwortung dieser Frage ist im Art. 256. V. und VI. enthalten, und sie ist für den Fall *negativer* Determinanten eine so vollständige, dass der Werth des Verhältnisses $h(D) : h(D')$ unmittelbar aus den Werthen von D und D' entnommen werden kann; nicht eben so vollständig durchgeführt ist der Fall *positiver* Determinanten, über welchen Gauss Folgendes sagt: *„Pro casu tertio autem, ubi D est numerus positivus non quadratus, regulam generalem pro comparanda multitudine formarum pr. primitivarum in V, V', V'' etc. cum multitudine classium diversarum inde resultantium hucusque non habe-*

mus. Id quidem asserere possumus, hanc vel illi aequalem vel ipsius partem aliquotam esse; quin etiam nexum singularem inter quotientem horum numerorum et valores minimos ipsorum t, u aequationi $tt - Duu = AA$ satisfacientes deteximus, quem hic explicare nimis prolixum foret; an vero possibile sit, illum quotientem in omnibus casibus ex sola inspectione numerorum D, A cognoscere (ut in casibus praecc.), de hac re nihil certi pronunciare possumus."

Das umfassendere und noch viel schwierigere Problem, die Classen-Anzahl $h(D)$ *selbst*, d. h. die Abhängigkeit dieser Anzahl von der Determinante D zu bestimmen, ist schon während des Drucks der fünften Section der Disquisitiones Arithmeticae, wie aus Art. 306. X. hervorgeht, ein Gegenstand des höchsten Interesse für Gauss gewesen, und es ist ihm in der That bald darauf gelungen, die vollständige Lösung desselben zu finden, was er noch am Schlusse des grossen Werkes mit folgenden Worten ankündigen konnte: „*Quaestionem hic propositam plene solvere nuper successit, quam disquisitionem plures partes tum Arithmeticae sublimioris tum Analyseos mirifice illustrantem in continuatione hujus operis trademus quam primum licebit.*" Allein die hier in Aussicht gestellte Veröffentlichung dieser Untersuchung ist zu Gauss' Lebzeiten nicht erfolgt; der hierauf bezügliche Theil seines Nachlasses, welchen ich in dem 1863 erschienenen zweiten Bande seiner gesammelten Werke herausgegeben habe, enthält namentlich zwei Fragmente, die aus den Jahren 1834 und 1837 stammen und den gemeinsamen Titel führen „*De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem.*" Obgleich jedes dieser Fragmente nach wenigen Seiten abbricht, so reicht ihr Inhalt doch aus, um den Weg vollständig überblicken zu lassen, auf welchem Gauss zu dem erstrebten Ziele gelangt ist.

Im Jahre 1839, also 38 Jahre nach dem Erscheinen der Disquisitiones Arithmeticae, trat *Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, der nach Gauss' eigenem Zeugniss zuerst von allen Mathematikern dieses Werk vollständig begriffen und die darin enthaltenen Untersuchungen selbständig weiter geführt hat, mit einer vollständigen und höchst eigenthümlichen Lösung des Problems der Classen-Anzahl hervor*). Ohne hier, was zu weit führen würde, auf eine nähere Vergleichung der Methode von Dirichlet mit derjenigen von Gauss einzugehen, bemerke ich nur, dass von Beiden für die Classen-Anzahl ein Ausdruck durch eine unendliche Reihe gewonnen wird,

---

*) Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres (Crelle's Journal Bd. 19, 21).

welche sich mit Hülfe gewisser, der Kreistheilung angehörender Sätze von Gauss summiren, also in geschlossener Form darstellen lässt. Aber es ist von Wichtigkeit, dass es schon *vor* Ausführung dieser Summation gelingt, aus dem erhaltenen Ausdrucke den Werth des oben besprochenen *Verhältnisses* $h(D):h(D')$ abzuleiten. Auf diese Weise*) ist Dirichlet für den Fall negativer Determinanten zu demselben Resultate gelangt, wie Gauss, und er hat ausserdem für den Fall positiver Determinanten zum ersten Male das Gesetz vollständig ausgesprochen, nach welchem das gesuchte Verhältniss von den kleinsten Lösungen der unbestimmten Gleichungen $tt - Duu = 1$, $t't' - D'u'u' = 1$ abhängt. Aus der oben angeführten, auf diesen Fall bezüglichen Stelle der Disquisitiones Arithmeticae geht aber wohl mit Gewissheit hervor, dass Gauss ebenfalls dieses Gesetz schon vollständig gekannt hat, welches zwar einfach, aber doch keineswegs so einfach ist, dass man *ex sola inspectione numerorum* D, D' den Werth des gesuchten Verhältnisses erkennen könnte; auch habe ich gezeigt**), dass man wirklich auf dem von Gauss eingeschlagenen Wege, d. h. durch die Composition der Formen, mit wenigen Schritten zu diesem, zuerst von Dirichlet ausgesprochenen Gesetze gelangen kann.

Beide Methoden, das Verhältniss der Classen-Anzahlen zu bestimmen, sowohl die von Gauss, welche auf die Composition der Formen gegründet ist, als auch diejenige von Dirichlet, zeichnen sich nun dadurch aus, dass sie auf ähnliche Probleme von sehr allgemeinem Charakter mit demselben Erfolge anwendbar sind***). Die binären quadratischen Formen, von welchen bisher ausschliesslich gesprochen ist, bilden nämlich nur einen äusserst speciellen Fall der sogenannten *zerlegbaren Formen*, d. h. der homogenen Functionen von beliebig hohem Grade n mit n Variabelen, welche rationale Coefficienten haben und in n lineare Factoren mit *algebraischen* Coefficienten zerlegbar sind. Das Verdienst, diese Formen zuerst betrachtet und eine charakteristische Fundamental-Eigenschaft derselben erkannt zu haben, gebührt *Lagrange* †), und eine weitere Verfolgung seines Gedankens hätte leicht

---

*) Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres (Crelle's Journal Bd. 21, §. 8).

**) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet. Zweite Auflage. 1871. §§. 150, 151. — Ich werde dieses Werk in der Folge kurz mit D. citiren.

***) Ob Dasselbe auch von der scharfsinnigen Methode gilt, welche R. Lipschitz zur Lösung derselben Aufgabe angewandt hat (Crelle's Journal Bd. 53), wage ich für jetzt nicht zu beurtheilen; doch spricht dafür der Erfolg, mit welchem er diese Methode auf ein höheres Problem übertragen hat (Crelle's Journal Bd. 54).

†) Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. §. VI. Mém. de l'Ac. de Berlin. T. XXIII, 1769. — Élémens d'Algèbre par L. Euler; Additions §. IX.