FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN. ERSTEN BANDES ERSTES HEFT: ALGEBRAISCHE ANALYSIS

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649135226

Funktionentheoretische Vorlesungen. Ersten bandes erstes heft: Algebraische analysis by Heinrich Burkhardt

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

HEINRICH BURKHARDT

FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN. ERSTEN BANDES ERSTES HEFT: ALGEBRAISCHE ANALYSIS

Trieste

FUNKTIONENTHEORETISCHE VORLESUNGEN.

Von

Dr. HEINRICH BURKHARDT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH.

ERSTEN BANDES ERSTES HEFT.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1903

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

VON

DR. HEINRICH BURKHARDT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1903

Vorwort.

Gedruckte und mündliche Kritiken meiner im Jahre 1897 veröffentlichten „Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen“ waren darüber einig, daß der III. Abschnitt, in dem ich einige Definitionen und Sätze aus der Theorie reeller Veränderlicher und ihrer Funktionen ohne Beweise zusammengestellt hatte, in seiner damaligen Gestalt seinem Zwecke nicht entsprach. Daher benutzte ich, als mich die Verlagsbuchhandlung von der Notwendigkeit einer neuen Auflage in Kenntnis setzte, gerne die Gelegenheit, jenen Abschnitt durch eine ausführlichere und mit Beweisen versehene Darstellung zu ersetzen. Damit ließ sich zugleich ein anderer Zweck verbinden. An der hiesigen Universität ist die regelmäßige Abhaltung einer Vorlesung über algebraische Analysis nicht nur herkömmlich, sondern sogar gesetzlich vorgeschrieben; ich habe lange gewünscht, meinen Zuhörern ein Buch in die Hand geben zu können, das den Gegenstand einer solchen Vorlesung in deutscher Sprache, aber in mäßigem Umfang und mit Hinweglassung alles für den Anfang zu schwierigen behandelte. Die französische Litteratur besitzt ein solches Buch in dem des Herrn J. Tannery; und man wird in der That seinem Bedauern zustimmen können, daß die einfachen Methoden, durch die Euler die analytischen Darstellungen der elementaren Transcendenten abgeleitet hat, aus dem Unterricht (dem deutschen wie dem französischen) so ganz verschwunden sind. Es liegt das jedenfalls daran, daß ihrer ursprünglichen Form die Strenge, ihrer Umarbeitung nach dieser Seite hin durch Cauchy die Einfachheit mangelt. Aber wenn man sich nur nicht davor scheut, gewisse erst der modernen Entwicklung angehörige Begriffe, wie namentlich den der gleichmäßigen Konvergenz, schon in die Elemente einzuführen, so läßt sich, wie eben das Beispiel von Tannery zeigt, sehr wohl eine Darstellung erreichen, die nach beiden Hinsichten billigen Ansprüchen gerecht wird. Beides, die allgemeine Theorie der Irrationalzahlen und Grenzprozesse und die speziellen analytischen Darstellungen der elementaren Transcendenten, in einem Buche zu vereinigen, ist schon deswegen zweckmäßig, weil das letztere ohne das erstere nicht in befriedigender Weise geschehen kann, das letztere ohne das erstere aber zu abstrakt und steril erscheinen würde.

Abweichend von Tannery beginne ich mit der arithmetischen Theorie der rationalen Zahlen, deren Gebrauch ich in erster Linie als ein Rechnen mit Operationen fasse. Eine solche im Mittelschulunterricht vorzutragen, würde pädagogisch unzweckmäßig sein; thut man es also nicht an der Hochschule, so bleibt eine Lücke. Doch habe ich immer Zuhörer, bezw. Leser vor Augen, denen nur eine rein arithmetische Behandlung des Gegenstandes, nicht dieser selbst neu ist; ich halte es daher keineswegs für nötig, in diesen Abschnitten von allen Sätzen ausgeführte Beweise zu geben oder auch nur sie alle anzuführen, vielmehr begnüge ich mich mit einer Erörterung der prinzipiell wichtigen Punkte und verweise für die bloße rechnerische Durchführung auf den vorausgegangenen Elementarunterricht. Überhaupt glaubte ich die Durchführung der Zwischenrechnungen in dem ganzen Hefte knapp halten zu dürfen, um die Hauptschritte des Gedankengangs um so schärfer hervortreten zu lassen; erstere führt erfahrungsgemäß ein nur halbwegs gut vorbereiteter und nur einigermaßen sich für sein Studium interessierender Zuhörer leicht selbst aus, während selbst Begabteren es öfters schwer wird, über den einzelnen Schritten der Rechnung Zweck und Ziel einer Deduktion nicht aus den Augen zu verlieren. Aber Untersuchungen über die Bildung der Begriffe der ganzen Zahlen und der Operationen mit ihnen halte ich für Sache nicht der Mathematik, sondern der Philosophie (womit ich sie keineswegs herabsetzen will). Auch auf die Frage nach der Reduktion der arithmetischen Axiome auf die geringst mögliche Zahl gehe ich nicht ein. Überhaupt scheint es mir für die Zwecke der Vorlesung und des Lehrbuchs nicht empfehlenswert, ein Axiomensystem an die Spitze zu stellen und so das Zahlenkontinuum mit einem Schlage einzuführen; vielmehr benutze ich eine synthetische Darstellung, bei der die einzelnen Zahlengattungen nacheinander, unter steter Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse der Geometrie eingeführt werden. Das ist nicht so zu verstehen, als ob ich es in einer systematischen Darstellung für zulässig hielte, bei Begründung der Analysis an die geometrische Anschauung zu appellieren; es soll ja eben erst gezeigt werden, daß man die Analysis so einrichten kann, daß sie den Bedürfnissen der Geometrie genügt. Aber der Meinung bin ich allerdings, daß die Einführung neuer Zahlengattungen in die Analysis zwar ihre formal-logische Berechtigung in der Freiheit des wissenschaftlichen Denkens findet, ihre wissenschaftlich-ökonomische aber (im Sinne von Mach) erst in den Bedürfnissen der Geometrie.

Von Sätzen über rationale ganze Funktionen bringe ich in Abschnitt IV so viel, als zum Verständnis des negativen Teils des Fundamentalsatzes der Algebra erforderlich ist, der u. a. bei der Reihen- und Produktdarstellung der trigonometrischen Funktionen gebraucht wird.

Doch schloß sich eine Darstellung der Elemente der Differenzenrechnung und ihrer Verwendung zur Interpolation ungezwungen an.

Ein Zwischenabschnitt V bringt die Auflösung der Systeme von 2, 3 und 4 linearen Gleichungen, ohne Determinanten, aber mit vollständiger Diskussion der verschiedenen Fälle, die über dem Formalismus der ersteren nur zu leicht außer acht gelassen wird.

Für die Definition der Irrationalzahlen benutze ich den Dedekindschen Schnitt, der mit den Auffassungen der antiken Geometer im wesentlichen übereinkommt; doch bringe ich alsbald auch den bei G. Cantor und den bei Weierstrass als Definition an die Spitze gestellten Satz und benutze dann später je nach Bedürfnis bald den einen, bald den andern. Das bringt einige Ungleichmäßigkeit in die Darstellung, aber so viele andere Vorteile, daß man jene gerne in den Kauf nehmen wird. Übrigens hebe ich — wie schon an anderer Stelle (Zürch. Viert. 46, 1901, p. 179) — das verschiedene Verhalten jener Sätze gegenüber den Forderungen des numerischen Rechnens hervor; wie ich mich denn überhaupt bemühe, wo es möglich ist, die Bedeutung der Sätze auch nach dieser Richtung hin klar zu legen.

Zu Abschnitt VII, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, habe ich hier nichts zu bemerken; zu Abschnitt VIII, unendliche Reihen, etwa, daß ich Sorge trage, diesen Begriff als einen zwar wichtigen, aber doch nur als einen speziellen Fall des allgemeinen Begriffs des Grenzübergangs erscheinen zu lassen. Von den Konvergenzkriterien nehme ich nur das Cauchy'sche und das Raabe'sche auf; daß ich an der Stätte von Raabe's Wirksamkeit das letztere den ungefähr gleich weittragenden von Gauss und Duhamel vorziehe, wird man billigen. Feinere Kriterien sind für die Elemente entbehrlich und also pädagogisch schädlich, weil wichtigeren Dingen Platz wegnehmend. Hier wie in ähnlichen Fällen weise ich auf negative Sätze (daß es kein allumfassendes Kriterium geben kann) ohne Beweis hin.

Die arithmetische Auffassung der Stetigkeit ist das Schwierigste im ganzen Buche. Ich habe mich schließlich dafür entschieden, den Weierstrass'schen Satz von der Notwendigkeit eines Häufungspunktes einer unendlichen Punktmenge und damit auch den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit in einem Intervall ganz wegzulassen, um jede nicht unumgängliche Schwierigkeit zu vermeiden. Das bedingt die Beschränkung des Satzes § 65 auf monotone Funktionen, außerdem eine kleine Modifikation in Satz und Beweis von der Stetigkeit des Quotienten zweier stetigen Funktionen; was aber beides für die Elemente nichts schadet.

In die beiden letzten Abschnitte nehme ich auf, was sich von den analytischen Darstellungen der elementaren Transcendenten ungezwungen auf elementarem Wege gewinnen läßt. Das läßt sich, nachdem in IX. der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz entwickelt ist, ziemlich kurz abthun; in der That bestehen die Beweise dieser Entwicklungen, wie sie von CAUCHY gegeben und in den auf Strenge Anspruch machenden älteren deutschen Lehrbüchern der algebraischen Analysis reproduziert sind, darin, daß in jedem einzelnen Falle die erforderlichen Grenzübergänge durch den Nachweis der Gleichmäßigkeit der Konvergenz gerechtfertigt werden. Was mehr Umstände macht oder die Umgehung des Integralbegriffs durch den Begriff des Mittelwerts erfordert, wie z. B. die Reihenentwicklung der cyclometrischen Funktionen, lasse ich beiseite, indem ich das Problem des Minimums des Arbeitsaufwands nicht auf den einzelnen Satz, sondern auf die Gesamtheit der zu überliefernden Erkenntnisse beziehe. Von Dingen, die sich in den herkömmlichen deutschen Darstellungen nicht finden, erwähne ich die Division durch eine Potenzreihe, sowie die (auf den Begriff der Majorante gestützte) Reihenumkehrung. Die arithmetische Begründung der Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung nehme ich nicht mit auf; immerhin entwickle ich den Begriff der Ableitung einer Potenzreihe.

Soll man nun wirklich in einer funktionentheoretischen Vorlesung alle diese Dinge erst ausführlich traktieren, ehe man sich an die Untersuchung auch nur der einfachsten Abhängigkeitsverhältnisse im komplexen Gebiete herantraut? Meine Meinung ist das nicht; vielmehr glaube ich, daß es sehr wohl möglich ist, auch bei der Darstellung der Elemente der Theorie der Funktionen komplexen Arguments mit einer an die geometrische Anschauung appellierenden Darstellung zu beginnen und die Diskussion subtilerer Fragen erst da wo sie auftauchen einzuschieben. Aber für ein gedrucktes Lehrbuch scheint mir allerdings eine systematische Anordnung im Interesse der leichteren Orientierung jetzt zweckmäßig.

Zum Schlusse will ich zur Vermeidung von Mißverständnissen nicht unterlassen zu bemerken, daß ich das Studium eines Buches wie das vorliegende erst dann für zweckmäßig halte, wenn durch eine vorausgehende Beschäftigung mit den Elementen der Infinitesimalrechnung das Bedürfnis nach einer rein arithmetischen Begründung geweckt ist.

Zürich, den 2. Februar 1903.

H. Burkhardt.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit positiven ganzen Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Die Null und die negativen Zahlen.

Dritter Abschnitt.

Rationale Brüche.