

**PARADOXIEN DES UNENDLICHEN;  
MIT UNTERSTÜTZUNG DER  
GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG  
DEUTSCHER WISSENSCHAFT, KUNST  
UND LITERATUR IN BÖHMEN**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649777129

Paradoxien des Unendlichen; Mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung Deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen by Bernard Bolzano & Dr. Fr. Prihonský & Hans Hahn

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.  
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

[www.triestepublishing.com](http://www.triestepublishing.com)

**BERNARD BOLZANO & DR. FR. PRIHONSKÝ & HANS HAHN**

**PARADOXIEN DES UNENDLICHEN;  
MIT UNTERSTÜTZUNG DER  
GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG  
DEUTSCHER WISSENSCHAFT, KUNST  
UND LITERATUR IN BÖHMEN**



BERNARD BOLZANO  
PARADOXIEN  
DES UNENDLICHEN

MIT UNTERSTÜTZUNG  
DER GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG DEUTSCHER  
WISSENSCHAFT, KUNST UND LITERATUR IN BÖHMEN  
HERAUSGEGEBEN VON DER PHILOSOPHISCHEN GESELLSCHAFT  
AN DER UNIVERSITÄT WIEN  
DURCH  
ALOIS HÖFLER

MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN VON  
HANS HAHN  
PROFESSOR DER MATHEMATIK IN BONN



DER PHILOSOPHISCHEN BIBLIOTHEK BAND 99  
VERLAG VON FELIX MEINER IN LEIPZIG 1920

DR. BERNARD BOLZANOS  
PARADOXIEN  
DES UNENDLICHEN

HERAUSGEGEBEN AUS DEM SCHRIFT-  
LICHEN NACHLASSE DES VERFASSERS

VON

DR. FR. PŘIHONSKÝ

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu  
d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit  
vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, p<sup>ou</sup>  
mieux marquer les perfections de son Auteur. (*Leibniz*,  
*Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II, part 1,*  
*p. 243.*)

LEIPZIG  
BEI C. H. RECLAM SEN.  
1851

## Vorwort des Herausgebers.

Die merkwürdige Abhandlung über die Paradoxien des Unendlichen begann ihr Verfasser bereits im Jahre 1847 während eines ländlichen Aufenthaltes in Gesellschaft des Herausgebers auf der anmutigen Villa zu Liboch bei Melnik, vollendete sie aber erst, durch Arbeiten anderer Art unterbrochen, in den Sommermonaten des folgenden Jahres, dem letzten seines Lebens. Er betätigte mit diesem Werke nicht nur, daß seine geistigen Vermögen trotz des bereits vorgerückten Alters (er stand damals in seinem 67. Jahre) und der sichtlichen Abnahme der körperlichen Kräfte an ihrer Frische und Regsamkeit noch immer nichts verloren hatten; sondern er lieferte hiermit zugleich der gelehrten Welt einen neuen Beweis, welche ungemeine Einsichten in die abstraktesten Tiefen der Mathematik, der reinen Naturwissenschaft und Metaphysik ihm waren zuteil geworden. Wahrhaftig, hätte Bolzano nichts anderes geschrieben und uns hinterlassen als diese Abhandlung allein: er müßte, wie wir fest glauben, schon um ihretwillen den ausgezeichneten Geistern unseres Jahrhunderts beigezählt werden! Die interessantesten und verwickeltesten Fragen, welche die Bearbeiter jener apriorischen Wissenschaften in bezug auf den Begriff des Unendlichen von jeher beschäftigten, versteht er mit bewundernswerter Leichtigkeit zu lösen und mit solch einer Klarheit vor den Augen des Lesers zu entfalten, daß auch derjenige, der nur nicht ganz ein Fremdling auf diesem Gebiete ist und von den hierher einschlagenden Dingen nur weniges begriffen hat, dem Vortrage des Verfassers zu folgen und seine Lehrsätze,

mindestens ihrem großen Teile nach, verständlich zu finden vermag. Der Kenner überdies muß, wofern er der Abhandlung einige Aufmerksamkeit schenket (und sollten wir dies nicht von einem jeden Gelehrten erwarten dürfen?), bald gewahr werden, von welcher Wichtigkeit die hier angedeuteten und in anderen Werken Bolzanos (seiner Logik insbesondere und Athanasia) umständlicher auseinandergesetzten Ansichten seien, und wie es mit ihnen auf nichts Geringeres abgesehen sei, als auf eine völlige Umgestaltung aller bisherigen wissenschaftlichen Darstellung.

Der Herausgeber erhielt diese Abhandlung im Manuskripte aus dem Nachlasse des Verfassers von dessen Erben mit der Verbindlichkeit, sie sobald als möglich zum Drucke zu fördern, und übernahm diese Verpflichtung um so bereitwilliger, je mehr sie mit seinen innersten Gefühlen (Bolzano war sein unvergeßlicher Lehrer und Freund) zusammenstimmt. Gern hätte er sich auch derselben schon früher entledigt, wären ihm nicht bedeutende Hindernisse in den Weg getreten, die er nicht eher als im Verlaufe dieses Jahres hat beseitigen können. Nun erst sah er sich in den Stand gesetzt, die lange bereits besorgte Abschrift nach dem nicht immer sehr lesbaren, hier und da sogar inkorrekten Manuskripte zu verbessern, eine genaue Inhaltsanzeige zur leichteren Benutzung des Büchleins zu fertigen und einen tauglichen Verlagsort dafür aufzusuchen. Er wählte Leipzig; weil er einerseits von diesem Umstande eine größere Verbreitung der Abhandlung selbst erwartet, andererseits eben hiermit die berühmte Bücherstadt, die Zierde und den Stolz seines neuen Vaterlandes (er ist ein geborener Böhme), zu ehren gedenkt: denn er lebt des Glaubens, es werde einst, wird nur erst Bolzanos hoher Genius allgemeine Anerkennung finden, Leipzig eben nicht zum letzten Ruhme gereichen, zur Erscheinung dieser Paradoxien beigetragen zu haben.

Budissin, am 10. Juli 1850.



## Inhalt.

- § 1. Warum sich der Verfasser ausschließlich nur mit der Betrachtung der Paradoxien des Unendlichen befassen wolle.
- § 2–10. Begriff des Unendlichen nach der Auffassung der Mathematiker und Erörterung desselben.
- § 11. Wie Hegel und andere Philosophen das Unendliche sich denken.
- § 12. Andere Erklärungen des Unendlichen und ihre Beurteilung.
- § 13. Gegenständlichkeit des vom Verfasser aufgestellten Begriffes, nachgewiesen an Beispielen aus dem Gebiete des Nichtwirklichen. Die Menge von Wahrheiten und Sätzen an sich ist unendlich.
- § 14. Widerlegung einiger gegen diesen Begriff erhobener Einwürfe.
- § 15. Die Menge der Zahlen ist unendlich.
- § 16. Die Menge der Größen überhaupt ist unendlich.
- § 17. Die Menge der einfachen Teile, sowohl derjenigen, aus denen Zeit und Raum überhaupt bestehen, als auch die Menge der Zeit- und Raumpunkte, die zwischen zwei einander noch so nahestehende Zeit- und Raumpunkte fallen, ist unendlich.
- § 18. Nicht eine jede Größe, die wir als die Summe einer unendlichen Menge anderer, die alle endlich sind, betrachten, ist selbst eine unendliche.
- § 19. Es gibt unendliche Mengen, die größer oder kleiner sind als andere unendliche Mengen.
- § 20. Ein merkwürdiges Verhältnis zweier unendlicher Mengen zueinander, bestehend darin, daß es möglich ist, jedes Ding der einen Menge mit dem der anderen zu einem Paare so zu verbinden, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung bleibt, auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt.

- § 21. Dennoch können beide unendliche Mengen, obschon mit Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile gleich, in einem Verhältnisse der Ungleichheit ihrer Vielheiten stehen, so daß die eine sich nur als ein Teil der anderen herausstellen kann.
- § 22 u. 23. Warum sich bei endlichen Mengen ein anderer Fall ergäbe, und wie es komme, daß dieser Grund bei unendlichen Mengen wegfallt.
- § 24. Zwei Summen von Größen, welche einander paarweise gleich sind, dürfen, wenn ihre Menge unendlich ist, nicht sofort gleichgesetzt werden, sondern nur dann erst, wenn beide Mengen gleiche Bestimmungsgründe haben.
- § 25. Es gibt auch ein Unendliches auf dem Gebiete der Wirklichkeit.
- § 26. Der Grundsatz der durchgängigen Bestimmtheit alles Wirklichen widerstreitet dieser Behauptung nicht.
- § 27. Wohl aber irren diejenigen Mathematiker, die von unendlich großen Zeitlängen, welche gleichwohl von beiden Seiten begrenzt sind, oder was noch öfter geschieht, die von unendlich kleinen Zeiteilen sprechen. Ebenso, die von unendlich großen und unendlich kleinen Entfernungen reden. Auch Physiker und Metaphysiker irren, wenn sie voraussetzen oder behaupten, es gäbe Kräfte im Weltall, die unendlichmal größer oder kleiner sind als andere.
- § 28. Die vorzüglichsten Paradoxien des Unendlichen auf dem Gebiete der Mathematik; zuvörderst in der allgemeinen Größen- und insbesondere in der Zahlenlehre.  
Wie sich das Paradoxon einer Rechnung des Unendlichen auflösen lasse.
- § 29. Es besteht in der That eine Rechnung mit unendlich Großem.
- § 30. Ebenso eine Rechnung mit unendlich Kleinem.
- § 31 u. 32. Falschheit einiger Begriffe, die selbst Mathematiker von unendlich Kleinem und unendlich Großem hegen.
- § 33. Vorsicht, die bei der Rechnung mit dem Unendlichen zu beobachten ist, um nicht auf Irrwege zu geraten.
- § 34. Genauere Bestimmung des Begriffes der Null. Die Null darf nie als Divisor angewendet werden in einer Gleichung, welche etwas mehr als eine bloß identische sein soll.
- § 35. Widersprüche, die aus der hier und da aufgestellten Behauptung entstehen, daß unendlich kleine Größen, wenn man sie mit gewissen anderen durch Addition oder Subtraktion verbindet, zu Null werden oder verschwinden.

- § 36. Diese Widersprüche werden nicht vermieden durch die Annahme einiger Mathematiker, daß die unendlich kleinen Größen bloße Nullen, die unendlich großen aber Quotienten wären, welche aus einer endlichen Größe durch die Division mit einer bloßen Null hervorgehen.
- § 37. Wie der Verf. die Methode des Rechnens mit dem Unendlichen auffassen zu müssen gemeint sei, um sie von allem Widerspruche zu befreien.
- § 38. Paradoxien des Unendlichen im angewandten Teile der Größenlehre, und zwar in der Zeit- und Raumlehre.  
Schon der Begriff des Continuum oder der stetigen Ausdehnung enthält scheinbare Widersprüche. Wie diese aufzulösen seien.
- § 39. Paradoxien im Begriffe der Zeit.
- § 40. Paradoxien im Begriffe des Raumes.
- § 41. Wie die meisten Paradoxien der Raumlehre in dem Begriffe des Verf. vom Raume ihre Erklärung finden.
- § 42 u. 43. Wie eine unrichtige Auffassung der Lehre vom unendlich Großen einige Mathematiker zu unrichtigen Vorstellungen veranlaßt haben.
- § 44. J. Schulzes Berechnung der Größe des unendlichen Raumes, und worin der Fehler dieser Berechnung eigentlich bestehe.
- § 45. Auch die Lehre vom unendlich Kleinen ward Veranlassung zur Behauptung so mancher Ungereintheit.
- § 46. Was von dem Satze Galileis zu halten sei: der Umfang des Kreises ist so groß wie dessen Mittelpunkt.
- § 47. Beleuchtung des Lehrsatzes, daß die gemeine Zykloide in dem Punkte, wo sie auf ihre Grundlinie trifft, eine unendlich große Krümmung habe.
- § 48. Wie es komme, daß manche räumliche Ausdehnungen, die sich durch einen unendlichen Raum verbreiten, gleichwohl nur eine endliche Größe haben; andere dagegen, die in einem endlichen Raume beschränkt sind, doch eine unendliche Größe besitzen; und noch manche andere eine endliche Größe behalten, ob sie gleich unendlich viele Umgänge um einen Punkt herum machen.
- § 49. Noch einige paradoxe Verhältnisse räumlicher Ausdehnungen, die eine unendliche Größe besitzen.
- § 50. Paradoxien des Unendlichen auf dem Gebiete der Physik und Metaphysik.