SIEBEN VORLESUNGEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649310128

Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte by Otto Hesse

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

OTTO HESSE

SIEBEN VORLESUNGEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

Trieste

SIEBEN VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER

KEGELSCHNITTE.

FORTSETZUNG DER VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER GERADEN LINIE,

DES PUNKTES UND DES KREISES

(Ludwig) VON

DR. OTTO HESSE,

PROF. AM POLYTECHNIKUM ZU MÜNCHEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1874.

Separatabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik
XIX. Jahrgang 1874.

Sechszehnte Vorlesung.*

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte.

Man kann die gerade Linie als den geometrischen Ort aller Punkte auffassen, deren Coordinaten einer beliebig gegebenen linearen Gleichung genügen. Unter diesem Gesichtspunkte wird der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Coordinaten einer beliebig gegebenen Gleichung des zweiten Grades genügen, eine Curve zweiter Ordnung oder kürzer Kegelschnitt genant. Der letztere gebräuchlichere Name ist der älteren synthetischen Raumgeometrie entnommen, welche die Curve als den Schnitt einer Ebene und eines Rotationskegels definirt.

Die Kegelschnitt-Gleichung besteht im Allgemeinen aus sechs Gliedern, wovon drei der zweiten Ordnung, zwei der ersten Ordnung und ein Glied der nullten Ordnung sind in Rücksicht auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y des variabelen Punktes. Machen wir jedoch die Gleichung durch Einführung der homogenen Coordinaten homogen und bezeichnen mit $f(x, y, z)$ einen Ausdruck von der Form:

1) $$f(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$

so wird nach der gegebenen Definition $f(x, y, z) = 0$ die allgemeine Form der Gleichung eines Kegelschnittes sein und die Verhältnisse der sechs Coefficienten a in der Gleichung werden die Natur und die Lage des Kegelschnittes in der Ebene bedingen.

Soll der Kegelschnitt durch einen Punkt gehen, dessen homogene Coordinaten gegeben sind, so müssen diese, an Stelle der variabelen Coordinaten gesetzt, der Gleichung genügen. Dieses giebt eine lineare homogene Bedingungsgleichung zwischen den sechs Coefficienten. Durch fünf solcher Bedingungsgleichungen werden die Verhältnisse der sechs Coefficienten a unzweideutig bestimmt sein. Man kann daher sagen:

---

* Diese Vorlesungen sind die Fortsetzung meiner fünfzehn „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises. Teubner 1873“. Sie setzen die Bekanntschaft des Lesers mit den Determinanten voraus, etwa in dem Umfange, als sie in meiner Schrift „Die Determinanten. Teubner 1873“ vorgetragen sind. Die Kenntniss der Regeln des Differentiirens wird ebenfalls vorausgesetzt.

Durch fünf beliebig gewählte Punkte in der Ebene lässt sich im Allgemeinen nur ein einziger Kegelschnitt legen und dieser Kegelschnitt ist in allen seinen Theilen durch die fünf gewählten Punkte vollständig bestimmt.

Der Kegelschnitt kann ein Linienpaar werden, wenn die fünf gegebenen Punkte eine specielle Lage haben; er kann sogar illusorisch werden. Um dieses nachzuweisen, müssen wir die Gleichung des Kegelschnittes selbst aufstellen, der durch fünf seiner Punkte gegeben ist.

Wenn wir die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes auf einem Kegelschnitte mit x, y, z bezeichnen und mit angehängten Indices die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte desselben, so haben wir folgende sechs Gleichungen:

$$f(x,y,z)=0,\quad f(x_1,y_1,z_1)=0,\quad f(x_2,y_2,z_2)=0,$$
$$f(x_3,y_3,z_3)=0,\quad f(x_4,y_4,z_4)=0,\quad f(x_5,y_5,z_5)=0.$$

Die Elimination der sechs zu bestimmenden Coefficienten a aus diesen Gleichungen ergiebt die Gleichung des Kegelschnittes, der durch die fünf bezeichneten Punkte geht:

$$\Delta = 0, \tag{2}$$

wenn wir mit Δ die Determinante bezeichnen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2, & y^2, & z^2, & yz, & zx, & xy \\ x_1^2, & y_1^2, & z_1^2, & y_1z_1, & z_1x_1, & x_1y_1 \\ x_2^2, & y_2^2, & z_2^2, & y_2z_2, & z_2x_2, & x_2y_2 \\ x_3^2, & y_3^2, & z_3^2, & y_3z_3, & z_3x_3, & x_3y_3 \\ x_4^2, & y_4^2, & z_4^2, & y_4z_4, & z_4x_4, & x_4y_4 \\ x_5^2, & y_5^2, & z_5^2, & y_5z_5, & z_5x_5, & x_5y_5 \end{vmatrix}; \tag{3}$$

denn es verschwindet die Determinante Δ, so oft man für die variabelen Coordinaten die Coordinaten eines der fünf Punkte setzt.

In diese Determinante lassen sich die Ausdrücke:

$$U \equiv ax + by + cz$$
$$U_1 \equiv ax_1 + by_1 + cz_1$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

einführen wie folgt. Wir multipliciren die Elemente der ersten Vertikalreihe mit a und addiren dazu die mit b multiplicirten Elemente der letzten und die mit c multiplicirten Elemente der vorletzten Vertikalreihe. Dadurch wird:

$$a\Delta = \begin{vmatrix} xU, & y^2, & z^2, & yz, & zx, & xy, \\ x_1U_1, & y_1^2, & z_1^2, & y_1z_1, & z_1x_1, & x_1y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5U_5, & y_5^2, & z_5^2, & y_5z_5, & z_5x_5, & x_5y_5 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in dieser Determinante die Elemente der zweiten Vertikalreihe mit b und addiren dazu die mit a multiplicirten Elemente der letzten und die mit c multiplicirten Elemente der vierten Vertikalreihe, multipliciren endlich die Elemente der dritten Vertikalreihe mit c und addiren dazu die mit a

multiplicirten Elemente der vorletzten und die mit b multiplicirten Elemente der vierten Vertikalreihe, so erhalten wir schliesslich:

$$4)\qquad abc\,\varDelta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} xU, & yU, & zU & yz, & zx, & xy \\ x_1U_1, & y_1U_1, & z_1U_1 & y_1z_1, & z_1x_1, & x_1y_1 \\ x_2U_2, & y_2U_2, & z_2U_2 & y_2z_2, & z_2x_2, & x_2y_2 \\ \hline x_3U_3, & y_3U_3, & z_3U_3 & y_3z_3, & z_3x_3, & x_3y_3 \\ x_4U_4, & y_4U_4, & z_4U_4 & y_4z_4, & z_4x_4, & x_4y_4 \\ x_5U_5, & y_5U_5, & z_5U_5 & y_5z_5, & z_5x_5, & x_5y_5 \end{array}\right|$$

Diese Determinante ist durch Striche in vier Quadrate getheilt. Wenn von den fünf gegebenen Punkten des Kegelschnittes die drei letzten in einer geraden Linie liegen, die durch die Gleichung $U=0$ gegeben ist, so verschwinden sämmtliche Elemente des links unten gelegenen Quadrates und die Determinante selbst zerfällt in das Produkt von zwei Determinanten der Art, dass man hat:

$$abc\,\varDelta = \begin{vmatrix} xU, & yU, & zU \\ x_1U_1, & y_1U_1, & z_1U_1 \\ x_2U_2, & y_2U_2, & z_2U_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3z_3, & z_3x_3, & x_3y_3 \\ y_4z_4, & z_4x_4, & x_4y_4 \\ y_5z_5, & z_5x_5, & x_5y_5 \end{vmatrix}$$

oder einfacher:

$$5)\qquad abc\,\varDelta = U\,U_1U_2 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3z_3, & z_3x_3, & x_3y_3 \\ y_4z_4, & z_4x_4, & x_4y_4 \\ y_5z_5, & z_5x_5, & x_5y_5 \end{vmatrix}.$$

Es beweist dieses den Satz:

Wenn von fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes drei Punkte auf einer geraden Linie liegen, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, von welchen die eine du ch die genannten drei Punkte geht, die andere die noch übrigen Punkte verbindet.

Nach diesem Satze wird der durch fünf Punkte bestimmte Kegelschnitt in zwei gerade Linien zerfallen, wenn vier von diesen Punkten auf einer geraden Linie liegen, und diese gerade Linie wird ein Theil des Kegelschnittes sein. Den zweiten Theil bildet aber eine jede gerade Linie, welche durch den fünften Punkt geht. Es kann demnach der Kegelschnitt nicht vollständig bestimmt sein, während seine Gleichung 2) doch nichts Unbestimmtes enthält. Dieses Paradoxon werden wir lösen, wenn wir nachweisen, dass die Gleichung 2) $\varDelta=0$ unter der angenommenen Bedingung eine identische Gleichung wird und deshalb keine Kegelschnitt-Gleichung sein kann.

Wenn $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, $U_4=0$ die Gleichungen der vier ersten Punkte des Kegelschnittes sind, welche der Annahme nach auf einer geraden Linie liegen, so haben wir unter 36) der neunten Vorlesung nachgewiesen, dass sich vier Factoren $\varkappa$ der Art bestimmen lassen, dass man identisch hat:

$$\varkappa_1 U_1^2 + \varkappa_2 U_2^2 + \varkappa_3 U_3^2 + \varkappa_4 U_4^2 \equiv 0.$$

Diese in Rücksicht auf die Variabelen u, v, w identische Gleichung löset sich auf in folgende sechs Gleichungen:

$$
6) \quad \begin{aligned}
&\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 + \varkappa_4 x_4^2 = 0,\\
&\varkappa_1 y_1^2 + \varkappa_2 y_2^2 + \varkappa_3 y_3^2 + \varkappa_4 y_4^2 = 0,\\
&\varkappa_1 z_1^2 + \varkappa_2 z_2^2 + \varkappa_3 z_3^2 + \varkappa_4 z_4^2 = 0,\\
&\varkappa_1 y_1 z_1 + \varkappa_2 y_2 z_2 + \varkappa_3 y_3 z_3 + \varkappa_4 y_4 z_4 = 0,\\
&\varkappa_1 z_1 x_1 + \varkappa_2 z_2 x_2 + \varkappa_3 z_3 x_3 + \varkappa_4 z_4 x_4 = 0,\\
&\varkappa_1 x_1 y_1 + \varkappa_2 x_2 y_2 + \varkappa_3 x_3 y_3 + \varkappa_4 x_4 y_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Gehen wir nun zurück auf die in 3) aufgestellte Determinante. Wenn wir in derselben zu den mit $\varkappa_1$ multiplicirten Elementen der zweiten Horizontalreihe addiren die mit $\varkappa_2$ multiplicirten Elemente der dritten Horizontalreihe, wenn wir ferner dazu addiren die mit $\varkappa_3$ multiplicirten Elemente der vierten und die mit x_4 multiplicirten Elemente der fünften Horizontalreihe, so erhält die Determinante nur den Factor $\varkappa_1$. Es verschwinden aber auf Grund der angegebenen Gleichungen 6) sämmtliche Elemente der zweiten Horizontalreihe und man hat eine von selbst verschwindende Determinante $\varkappa_1 \Delta$, die gleich Null gesetzt, nicht mehr der analytische Ausdruck einer Curve sein kann.

Der Kegelschnitt $f(x, y, z) = 0$ wird ein Linienpaar sein, wenn der linke Theil der Gleichung in zwei lineare Factoren A und B zerfällt der Art, dass man identisch hat:

$$\tfrac{1}{2} f(x, y, z) \equiv A B.$$

Aus dieser Gleichung gehen wieder identische Gleichungen hervor, wenn man dieselbe nach den Variabelen partiell differentiirt:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} f'(x) &\equiv A \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial x},\\
\tfrac{1}{2} f'(y) &\equiv A \frac{\partial B}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial y},\\
\tfrac{1}{2} f'(z) &\equiv A \frac{\partial B}{\partial z} + B \frac{\partial A}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Lässt man in diesen Gleichungen die Variabelen der Coordinaten des Schnittpunktes der geraden Linien $A = 0$ und $B = 0$ bedeuten, in welche der Kegelschnitt zerfällt, so nehmen sie die einfachere Gestalt an:

$$7) \qquad f'(x) = 0, \quad f'(y) = 0, \quad f'(z) = 0$$

und das Resultat der Elimination:

$$
8) \qquad \begin{vmatrix} a_{00}, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0
$$

wird die Bedingung sein, unter welcher der Kegelschnitt $f(x, y, z) = 0$ in ein Linienpaar zerfällt. Es ist dieses dieselbe Bedingungsgleichung, welche wir in 5) der achten Vorlesung auf einem andern, weitläuftigeren Wege abgeleitet haben. Wir wollen es jedoch nicht verschweigen, dass das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen 7) in vielen Fällen ein durchsichtigeres Kriterium für ein Linienpaar ist, als die Gleichung 8).

Die Determinante auf der linken Seite der Gleichung 8) heisst die **Determinante der Function** $f(x, y, z)$, weil ihre Elemente die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function sind. Auf Grund dieser Difinition können wir nun den Satz aussprechen:

9) **Wenn $f(x,y,z)=0$ die homogene Gleichung eines Kegelschnittes ist, so stellt dieselbe ein Linienpaar dar unter der Bedingung, dass die Determinante der Function $f(x,y,z)$ verschwindet.**

Irgend zwei durch ihre Gleichungen in gewöhnlichen Punktcoordinaten gegebene Curven schneiden sich in Punkten, deren Coordinaten den beiden Gleichungen zugleich genügen. Es ist daher die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven gleich der Zahl der Werthepaare der Coordinaten, welche ihren Gleichungen zugleich genügen. Ist die eine Curve ein Kegelschnitt, die andere eine gerade Linie, und man setzt den Werth von y aus der Gleichung der geraden Linie in die Gleichung des Kegelschnittes, so erhält man eine quadratische Gleichung in x und jeder Wurzel dieser Gleichung entspricht ein Werth von y, der sich aus der Gleichung der geraden Linie berechnen lässt. Man kann daher sagen:

Die gerade Linie schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten.

Hierauf basirt die Aufgabe:

Die Gleichung des Punktepaares zu bestimmen, in welchem ein gegebener Kegelschnitt von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird.

Wenn

10)
$$f(x,y,z)=0,$$
$$ax+by+cz=0$$

die Gleichungen des Kegelschnittes und der geraden Linie sind, und man versteht unter x, y, z die Coordinaten irgend eines der beiden Schnittpunkte, so wird

11)
$$ux+vy+wz=0$$

die Gleichung des Schnittpunktes selber sein.

Die Elimination der homogenen Punktcoordinaten aus den aufgestellten Gleichungen giebt die Gleichung des gesuchten Punktepaares:

12)
$$f(bw-cv,\ cu-aw,\ av-bu)=0.$$

Dass diese Gleichung ein Punktepaar darstellt, wird man auch daraus ersehen können, dass der linke Theil derselben wirklich in zwei lineare Factoren zerfällt, wofür wir die Bedingungen eben zuvor entwickelt haben.

Um die Frage nach der Zahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zur Entscheidung zu bringen, ordnen wir die in gewöhnlichen Punktcoordinaten gegebenen Kegelschnitt-Gleichungen nach den Potenzen der Variabele y:

$$a_2+a_1y+a_0y^2=0,$$
$$b_2+b_1y+b_0y^2=0,$$