THEORIE UND AWENDUNG DER LINIENCOORDINATEN IN DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649778096

Theorie und Awendung der Liniencoordinaten in der Analytischen Geometrie der Ebene by
Dr. Karl Schwering

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

DR. KARL SCHWERING

THEORIE UND AWENDUNG DER LINIENCOORDINATEN IN DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

Trieste

THEORIE UND ANWENDUNG

DER

LINIENCOORDINATEN

IN DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

VON

Dr. KARL SCHWERING,

OBERLEHRER IN COESFELD.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND ZWEI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Vorwort.

Das in der gegenwärtigen kleinen Schrift dem Vortrage zu Grunde liegende System von Liniencoordinaten ist derjenige Specialfall des allgemeinen trimetrischen Systems (vergl. Salmon-Fiedler, die Kegelschnitte, Art. 76), wo eine Ecke des Fundamentaldreiecks in das Unendliche verlegt ist. Eine weitere, sehr wichtige Specialisirung liegt in der Festsetzung, dass die Coordinatenwerthe von zwei Puncten aus gezählt werden sollen, welche eine senkrechte Gerade auf den beiden parallelen Axen bestimmt. Die Wichtigkeit dieser Bestimmung leuchtet ein, wenn man z. B. erwägt, dass durch dieselbe die Möglichkeit, die Ellipsengleichung in die Form $u \, . \, v =$ const. zu setzen, auf zwei bestimmte Lagen der Coordinatenaxen eingeschränkt wird. Diese Lagen werden daher vor andern Tangentenpaaren durch das System in ähnlicher Weise hervorgehoben, wie durch rechtwinklige Punctcoordinaten die Axen der Ellipse vor den übrigen Paaren conjugirter Diameter. In Fachkreisen ist das von mir zuerst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 21, S. 278, dann in einer Programmabhandlung des Briloner Gymnasiums behandelte Coordinatensystem nicht unbeachtet geblieben. Ausser mündlichen und schriftlichen Mittheilungen namhafter Mathematiker hebe ich hier insbesondere zwei mit grosser Sachkenntniss geschriebene Recensionen, die eine von Herrn Schlegel, Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 24, S. 101, die andere von Herrn Günther, Darboux Bulletin Tome III, Nov. 1879, hervor. Herr Schlegel hat zudem in obiger Zeitschrift Bd. 23, S. 195

den Nachweis geliefert, dass das System in der That dem Cartesischen vollständig reciprok ist.

Zur Zusammenstellung und Bearbeitung des grossentheils seit einigen Jahren fertig liegenden Materials veranlassten mich Überlegungen und Bemerkungen nicht so sehr wissenschaftlicher als vielmehr didaktischer Natur. Die Darstellung der Liniencoordinaten erscheint in den gangbarsten Lehrbüchern der analytischen Geometrie, wenn überhaupt, dann in einer zwiefachen Complication. Die Liniencoordinaten werden erstens aus den Punctcoordinaten abgeleitet, indem man in den Gleichungen der geraden Linie die Coefficienten statt der Coordinatenwerthe variabel macht, während es doch nicht allein möglich, sondern sehr einfach ist, die Liniencoordinaten aus diesem Abhängigkeitsverhältnisse zu erlösen. Diese Abhängigkeit ist um so drückender, als man dabei zunächst keine direct messbaren Strecken, sondern reciproke Werthe erhält, und daher das System nicht ein geometrisch erfasstes, sondern rechnerisch gewonnenes bleiben muss. Zu diesem einen Übelstande tritt der zweite, dass die gewonnene Theorie sofort auf trimetrische Systeme angewandt wird. Hier hat man nun freilich geometrisch anschaubare Grössen, nämlich die Entfernungen der drei Ecken des Fundamentaldreiecks von einer Geraden als Coordinaten derselben gewonnen, aber dieser Vortheil schwindet zum Theil wieder dadurch, dass ja nicht die Entfernungen selbst, sondern ihre Verhältnisse die eigentlichen variablen Grössen in der Gleichung eines Ortes sind. Trilineare Coordinaten an und für sich sind aber zweifellos nicht die einfachste Form, da es wohl Niemandem einfallen wird, einem Anfänger von ihnen ausgehend etwa die Cartesischen zu erklären.

Und für den Anfänger eben ist die vorliegende Zusammenstellung bestimmt. Darum auch hielt ich es für zweckmässig, etwa bis zum sechsten Abschnitte hin nur die allgemeinste Kenntniss der Punctcoordinaten und überhaupt diejenigen mathematischen Grundlagen vorauszusetzen, welche man an einem deutschen Gymnasium sich anzueignen Gelegenheit hat. Die letzten Abschnitte sollen zeigen, dass das System sich auch bei höheren Curven und für solche Fragen bewährt, die man sonst nur mit Hülfe der Punctcoordinaten in den Lehrbüchern bearbeitet findet. Dabei bin ich grundsätzlich allgemeineren Untersuchungen, die mit der besonderen Natur unseres Systems in keinem Zusammenhange stehen, aus dem Wege gegangen, und habe auch hier möglichst wenig Specialwissen vorauszusetzen und immer an die allgemeinsten Grundlagen anzuknüpfen mich bemüht.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Von den Coordinaten. Definition.

1. Wenn ein Punct sich in der Ebene bewegt, so beschreibt er eine Linie. Der Punct erscheint also als Raumelement. Indess kann auch die Gerade als Raumelement aufgefasst werden. Denken wir uns an einen Kreis die sämmtlichen Tangenten gelegt, so werden durch jeden Punct der Ebene zwei dieser Tangenten gehen mit Ausnahme der Puncte im Innern des Kreises, welche von keiner solchen Geraden getroffen werden. So können wir also den Kreis als den geometrischen Ort aller Geraden definiren, welche von einem gewissen Puncte, dem Mittelpuncte, gleichen Abstand haben. Eine Zeichnung wird dies veranschaulichen. Man ziehe von einem Puncte P aus eine Anzahl, etwa 10 Gerade nach möglichst verschiedenen Richtungen, trage auf denselben von P aus gleiche Strecken ab und errichte im Endpuncte auf jeder derselben die Senkrechte, die man etwa mit rother Tinte gezeichnet denken möge. Alsdann wird sich bald von dem Gewirre der rothen, sich durchkreuzenden Linien um P herum ein weisser Fleck abheben, der deutlich die Kreisform hervortreten lässt. Siehe Figur 1 der angehängten Tafel.

2. Wie es nun Aufgabe einer auf Punctcoordinaten gestützten analytischen Geometrie ist, das Bewegungsgesetz des Punctes durch eine Gleichung auszudrücken, so ist es Aufgabe einer sich auf Liniencoordinaten stützenden Geometrie, das Bewegungsgesetz der Geraden durch eine Gleichung wiederzugeben.

3. Zu diesem Zwecke dient das folgende System. Man nehme in der Ebene zwei parallele Gerade an, die durch ein auf ihnen errichtetes Lot in den Punkten O und Q geschnitten werden. Die Strecke QO, die Entfernung der beiden Parallelen, nennen

wir e und definiren nun als **Coordinaten** der Geraden L, welche die Parallelen in den Puncten A und B schneidet, die in **gleicher Richtung** gemessenen Strecken OA und QB. Wir bezeichnen dieselben durch

$$u = OA \quad \text{und} \quad v = QB$$

und nennen **die beiden Parallelen** OA **und** QB **mit Rücksicht darauf die** U- **und** V-**Axen**. Die Richtung QO von der V-Axe zur U-Axe hin gilt als positiv. (Tafel, Fig. 2.)

Ist als positive Richtung der horizontal gedachten Axen die dem Beschauer rechts liegende festgesetzt, so kann man sofort die Aufgabe lösen: Man zeichne die Gerade, welche den Coordinaten $u = a$ und $v = b$ entspricht. Sie wird bezeichnet durch (a, b).

Zur Übung zeichne man die Geraden $(4, 5)$; $(-3, 2)$; $(5, -6)$; $(-4, 6)$; $(0, -3)$; $(0, 0)$.

4. Umgekehrt hat jede Gerade der Ebene zwei bestimmte Coordinaten. Dies ist unzweifelhaft für jede Gerade, welche die Axen schneidet. Dagegen bedürfen die den Axen parallelen Geraden einer besonderen Untersuchung. Wir greifen auf dem **Mittellote** OQ einen bestimmten Punct A heraus und ziehen durch ihn die Gerade, welche die Axen in den Puncten C und D treffen möge. Dann sind OC und QD die Coordinaten der Geraden ACD. Nun ist, wenn $AO = a$, $AQ = b$

$$a : b = u : v.$$

Wird nun die Gerade sich der parallelen Lage nähern, so wachsen die Coordinaten unbegrenzt, aber ihr Verhältniss ist ein festbestimmtes: das ihrer Abstände von den Axen. Ist dieses Verhältniss gleich -1, so haben wir die **Mittellinie der Axen**, ist es $+1$, so haben wir die **unendlich ferne Gerade** vor uns. Hat dies Verhältniss den Werth 0 oder ∞, so erhalten wir eine der beiden Axen.

5. **Aufgabe.** Man bestimme die Gleichung des Kreises. Zu diesem Zwecke nehmen wir zwei parallele Tangenten desselben als U- und V-Axe an. e ist also gleich $2r$. Verbinden wir nun die Schnittpuncte A, B der willkürlichen Tangente L mit dem Mittelpuncte C. (Tafel, Fig. 3.)

Es ist:

$$OA = u, \quad QB = v.$$