# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649162093

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques by  H. Laurent



Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017



www.triestepublishing.com

H. LAURENT

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Trieste

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVI, XVII et XVIII ; 1877, 1878 et 1879.

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES,


PAR H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1882

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

# FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Les personnes qui veulent étudier la théorie des fonctions elliptiques ont certainement d'excellents ouvrages à leur disposition : les *Fundamenta nova* de Jacobi, les *Œuvres* d'Abel, l'ouvrage plus ancien de Legendre, sont des chefs-d'œuvre qu'il est bon d'avoir lus quand on veut approfondir la théorie des fonctions elliptiques. Le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet, résume aujourd'hui presque tous les faits acquis à la Science sur cette branche intéressante de l'Analyse; mais il n'existe pas de Traité, pour ainsi dire élémentaire, dans lequel on puisse prendre une idée suffisamment exacte de la théorie des fonctions elliptiques, sans cependant l'approfondir dans tous ses détails.

Nous croyons donc faire une chose utile en offrant aux lecteurs des *Nouvelles Annales* une théorie des fonctions elliptiques résumant leurs propriétés les plus importantes, et leurs principales applications à la Géométrie et à la Mécanique.

Nous n'avons pas l'intention, disons-le immédiatement, de suppléer à la lecture des grands maîtres; nos articles devront surtout avoir pour but de faciliter cette lecture et d'en inspirer le goût.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Avant d'aborder la question des fonctions elliptiques, nous ferons connaître quelques principes relatifs à la théorie générale des fonctions.

Nous représenterons une imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ par un point dont les coordonnées seront $x$ et $y$, ou par une droite dont la longueur sera le module $r=\sqrt{x^2+y^2}$, faisant avec l'axe des $x$ un angle $\theta$ égal à l'argument de $x+y\sqrt{-1}$. Cet argument sera d'ailleurs pour nous *l'un quelconque* des angles ayant pour cosinus $\frac{x}{r}$ et pour sinus $\frac{y}{r}$.

Quand nous dirons que le point $x+y\sqrt{-1}$ décrit une courbe, il faudra entendre par là que le point dont les coordonnées sont $x$, $y$ décrit cette courbe. On peut considérer l'expression $X+Y\sqrt{-1}$, où X et Y sont des fonctions de $x$ et $y$, comme une fonction de $x+y\sqrt{-1}$. Cauchy se plaçait à ce point de vue, mais nous ne considérerons que les fonctions de $x+y\sqrt{-1}$ ayant une dérivée unique et bien déterminée. Cette condition d'avoir une dérivée unique impose à X et Y certaines propriétés que nous allons faire connaître. La dérivée de $X+Y\sqrt{-1}$ est

$$\frac{dX+dY\sqrt{-1}}{dx+dy\sqrt{-1}}=\frac{\frac{dX}{dx}dx+\frac{dX}{dy}dy+\sqrt{-1}\left(\frac{dY}{dx}dx+\frac{dY}{dy}dy\right)}{dx+dy\sqrt{-1}};$$

et, pour qu'elle soit indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire de la manière dont $dx+dy\sqrt{-1}$ tend vers zéro, il faut que

$$\frac{\frac{dX}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{dY}{dx}}{1}=\frac{\frac{dX}{dy}+\sqrt{-1}\,\frac{dY}{dy}}{\sqrt{-1}};$$

d'où l'on conclut, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy},\quad \frac{dY}{dx}=-\frac{dX}{dy}\quad (*).$$

Nous supposerons ces relations toujours satisfaites; d'ailleurs, la manière dont on prend les dérivées des fonctions que l'on rencontre en analyse prouve que ces fonctions n'ont qu'une seule dérivée.

Une fonction qui n'a qu'une dérivée en chaque point, c'est-à-dire pour chaque valeur de la variable, a quelquefois été appelée *monogène*.

Une fonction est dite *monodrome* dans une portion C du plan, quand, le point qui représente sa variable (ou, pour abréger, quand sa variable) se mouvant dans cette portion C du plan, la fonction reprend toujours la même valeur quand sa variable repasse par le même point.

Les fonctions bien définies, telles que les fonctions rationnelles, le sinus, le cosinus, l'exponentielle, etc., sont monodromes dans toute l'étendue du plan; car, leur variable étant donnée, elles sont entièrement définies. Il n'en est pas de même des fonctions irrationnelles; ainsi, pour ne prendre qu'un seul exemple, $\sqrt{z-a}$ ou $\sqrt{x+y\sqrt{-1}-a}$ n'est pas monodrome à l'intérieur d'un contour contenant le point $a$.

Imaginons, en effet, que le point $z$, ou $x+y\sqrt{-1}$,

(*) Pour l'interprétation de ces formules, *voir* le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet.

décrive un cercle de rayon $r$ ayant pour centre le point $a$, on sait que la droite qui représente la somme de deux imaginaires est la résultante des droites représentant chaque partie de la somme (*) ; la droite $re^{\theta\sqrt{-1}}$, qui représentera la somme $z-a$, sera donc la résultante des droites qui représentent $z$ et $-a$. Cette droite est celle qui va du point $+a$ au point $z$. Supposer que le point $z$ décrit un cercle de rayon $r$ autour du point $a$, c'est donc supposer que le module $r$ de $z-a=re^{\theta\sqrt{-1}}$ reste constant. Cela posé, on a

$$\sqrt{z-a}=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}.$$

Que le point $z$ se meuve sur le cercle en tournant dans le sens positif (celui dans lequel les angles croissent en Trigonométrie), $\theta$ va croître ainsi que $\frac{\theta}{2}$. Mais, quand $\theta$ aura varié de $2\pi$, le point $z$ sera revenu à son point de départ, et $z$ aura repris sa valeur initiale; il n'en sera pas de même de $\sqrt{z-a}$, qui sera devenu

$$r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta+2\pi}{2}\sqrt{-1}}=-r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}},$$

et qui aura changé de signe.

## DES INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES.

La fonction $f(z)$ de la variable imaginaire

$$z=x+y\sqrt{-1}$$

(*) *Voir* l'Ouvrage de Mourey sur *La vraie théorie des quantités prétendues imaginaires*; sur le *Calcul des équipollences* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VIII, 1869); mon *Traité d'Algèbre*; l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet déjà cité, etc.