LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE DANS LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649774012

La Dualité et l'Homographie dans le Triangle et le Tétraèdre by L. Ripert

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

www.triestepublishing.com

L. RIPERT

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE DANS LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE

Trieste

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE

DANS

LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE,

PAR

L. RIPERT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
COMMANDANT DU GÉNIE EN RETRAITE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE

DANS

LE TRIANGLE ET LE TÉTRAÈDRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.

Préliminaires.

Nous nous proposons de démontrer que le défaut d'application aux propriétés métriques des principes de dualité et d'homographie est apparent et non réel, et que ces grands principes sont plus généraux et plus féconds qu'on le suppose. Nous prenons pour base des applications la Géométrie du triangle [1]; nous la supposons connue; nous supprimerons donc, en principe, les démonstrations de tout fait qui ne nous semble pas nouveau.

Ainsi, nous admettons comme acquis des résultats tels que les suivants :

La conique représentée, en coordonnées barycentriques, par l'équation ponctuelle

$$F(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

---

(1) Nous avons traité ces questions à un point de vue plus général, dans un Ouvrage (en préparation) intitulé : *Éléments comparés de Géométrie analytique*. Le présent Travail répond explicitement à la question 1142 que nous avons posée à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, et nous dispensera d'en poser un grand nombre d'autres que nous avions en vue. Il répond également aux questions 1114, 1141 et 1143.

a pour centre le point dont les coordonnées, données par

$$F'_X = F'_Y = F'_Z,$$

sont

$$(c) \qquad a + b' + b'', \qquad a' + b'' + b, \qquad a'' + b + b',$$

$a, a', \ldots, b''$ étant les mineurs correspondant à A, A', ..., B'' dans le discriminant Δ. D'où il résulte que la *corrélative* $[F(U, V, W) = 0]$ a pour équation ponctuelle

$$\Phi(X, Y, Z) = \Sigma a X^2 + 2 \Sigma b YZ = 0,$$

et pour centre

$$(c') \qquad A + B' + B'', \qquad A' + B'' + B, \qquad A'' + B + B',$$

Les coniques $F = 0$ et $\Phi = 0$ sont ellipses, paraboles ou hyperboles, selon que l'on a respectivement

$$\Sigma a + 2 \Sigma b \gtreqless 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\Sigma A + 2 \Sigma B) \gtreqless 0.$$

Les coordonnées ponctuelles du centre de l'une sont les coordonnées tangentielles de la polaire du barycentre par rapport à l'autre.

D'après les formules (c'), on peut faire correspondre à toute conique donnée $F = 0$, et *sans avoir besoin de calculer l'équation de sa corrélative*, un point remarquable (c') que nous appellerons le *centre corrélatif* de $F = 0$.

Définitions. — Deux éléments de même espèce constituent un *couple*, trois éléments un *triple*, quatre éléments un *quadruple*, etc.

A l'expression très usuelle : *milieu de la droite* AB, nous substituerons celle de *point moyen*, en sous-entendant les mots : *du système des points* A *et* B, pour le motif suivant : Si l'on s'habitue à cette notion ainsi formulée, on n'aura aucune peine à passer à celle de la *droite moyenne* (*du système des droites a et b*), le pivot et l'écueil des applications du principe de dualité. A la droite de l'infini $(X + Y + Z = 0)$ correspond dualistiquement le barycentre $(U + V + W = 0)$. (*Voir* Chap. IV.)

On appelle *point moyen du système des points* A *et* B le conjugué (harmonique) du point d'intersection de la droite de l'infini avec la jonction *d* des

On appelle *droite moyenne du système des droites a et b* la conjuguée (harmonique) de la droite de jonction du barycentre avec l'intersection D des droites points A et B, dit *point de l'infini* de *d*.

a et *b*, dite *droite barycentrique* de D.

Remarque. — La Géométrie du triangle date de 1873, époque où M. Émile Lemoine signala, dans un premier Mémoire, les multiples propriétés du *point* auquel son nom a été légitimement attaché. En 1875, M. le Commandant Brocard donna à cette Géométrie une nouvelle et vive impulsion en la faisant entrer dans l'ordre d'idées si fécond du *couple de points*. Dès 1866, M. G. de Longchamps avait ouvert une grande voie, celle de la *corrélation* du point et de la droite. M. J. Neuberg, l'un des géomètres qui ont le plus contribué à créer cette Géométrie récente, l'a remarquablement résumée dans une *Note* insérée au Tome I du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (Gauthier-Villars et fils; 1891).

Lorsque l'on étudie la Géométrie du triangle, on peut être choqué au premier abord du nombre considérable de noms et mots nouveaux introduits. Mais on ne tarde pas à reconnaître que cette multiplicité de noms est *indispensable* pour la clarté. Il y a là, ainsi que l'a spirituellement remarqué notre ami Lemoine, « une nécessité comparable à celle de l'attribution de noms aux rues d'une ville, seul procédé qui permette de s'orienter dans leur dédale ». Nos lecteurs ont d'ailleurs depuis longtemps reconnu cette vérité qui s'imposera, plus grande encore, en Géométrie du tétraèdre.

CHAPITRE I.

TRIANGLE ABSOLU (OU CONSIDÉRÉ ISOLÉMENT).

Constitution d'un triangle.

Un couple de droites *b* et *c* se croisant en A est une conique de centre A. Toute droite AD passant par A est un diamètre; il lui correspond un diamètre conjugué AD′, que l'on obtient en menant une parallèle quelconque B′C′ à AD et prenant le point moyen D′ (du système B′, C′).

Un *triangle* ABC se présente donc comme essentiellement constitué par trois *coniques rectilignes* A, B, C, dont deux quelconques ont une droite commune, avec un triple de *sommets* (A, B, C) et un triple de *côtés* (a, b, c).

Éléments remarquables absolus.

Dans le triangle ABC, *considéré isolément*, sont remarquables : 1° les *points moyens* A_m, B_m, C_m des côtés, par suite les *médianes* et le *barycentre* G ; 2° les jonctions $B_m C_m$, $C_m A_m$, $A_m B_m$ des points moyens, qui forment le *triangle pédal* du barycentre ; 3° les parallèles $G_b G_c$, $G_c G_a$, $G_a G_b$, menées par les sommets, qui forment le *triangle complémentaire* de G, dont les sommets G_a, G_b, G_c sont les *points adjoints* à G. Ce sont les seuls éléments *descriptifs* du triangle ; ils sont *remarquables absolus*.

Tous les autres éléments (centres de cercles divers, orthocentre, points de Lemoine, de Brocard, etc.) sont *métriques*, et, par suite, *remarquables relatifs*. Ils sous-entendent *l'association* du triangle avec un cercle, *cas particulier d'une conique ;* nous les examinerons au Chapitre suivant.

Coniques remarquables absolues.

Nous appellerons *conique remarquable absolue* toute conique dont la définition ne dépend que des éléments remarquables absolus. Telles sont :

1° Les deux *ellipses de Steiner*, l'une circonscrite (E_c), l'autre inscrite (E_i), ayant leur centre en G, et qui sont corrélatives l'une de l'autre. L'ellipse E_c a pour équation $\Sigma YZ = 0$; elle passe par le *point de Steiner* $\left(\frac{1}{b^2 - c^2}, \cdots\right)$ et plus généralement, quels que soient α, β, γ, λ, par tout point $\left(\frac{1}{\beta^\lambda - \gamma^\lambda}, \cdots\right)$. L'ellipse E_i, qui touche les côtés en leurs points moyens, a pour équation

$$\Sigma X^2 - 2\Sigma YZ = 0;$$

elle passe par le *centre* (de l'hyperbole) *de Kiépert* $[(b^2 - c^2)^2, \ldots]$, et plus généralement, par tout point $[(\beta^\lambda - \gamma^\lambda)^2, \ldots]$.

2° Les trois *paraboles de Artzt*, tangentes à deux côtés aux