

**ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL-
UND INTEGRALRECHNUNG AUF DIE
ALLGEMEINE THEORIE DER FLÄCHEN
UND DER LINIEN DOPPELTER
KRÜMMUNG; ZWEITE AUFLAGE**

Published @ 2017 Trieste Publishing Pty Ltd

ISBN 9780649170005

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung; Zweite Auflage by F. Joachimsthal

Except for use in any review, the reproduction or utilisation of this work in whole or in part in any form by any electronic, mechanical or other means, now known or hereafter invented, including xerography, photocopying and recording, or in any information storage or retrieval system, is forbidden without the permission of the publisher, Trieste Publishing Pty Ltd, PO Box 1576 Collingwood, Victoria 3066 Australia.

All rights reserved.

Edited by Trieste Publishing Pty Ltd.
Cover @ 2017

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade or otherwise, be lent, re-sold, hired out, or otherwise circulated without the publisher's prior consent in any form or binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

www.triestepublishing.com

F. JOACHIMSTHAL

**ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL-
UND INTEGRALRECHNUNG AUF DIE
ALLGEMEINE THEORIE DER FLÄCHEN
UND DER LINIEN DOPPELTER
KRÜMMUNG; ZWEITE AUFLAGE**

ANWENDUNG
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG
AUF
DIE ALLGEMEINE THEORIE
DER
FLÄCHEN UND DER LINIEN DOPPELTER KRÜMMUNG.
VON
F. JOACHIMSTHAL.

ZWEITE AUFLAGE,
BEARBEITET VON **L. NATANI.**



MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die in vorliegendem Werke der Oeffentlichkeit übergebenen Vorlesungen hat der der Wissenschaft und den Hörern viel zu früh entrissene Professor Ferdinand Joachimsthal an der Universität zu Breslau im Wintersemester 1856/57 gehalten, und den Herausgeber, der damals zu seinen Füßen sass, beauftragt, sie wortgetreu nachzuschreiben und für die Herausgabe druckfertig abzufassen. Nach Schluss der Vorlesungen empfing Herr Professor Joachimsthal das Manuscript und hatte nach eingehender Prüfung nichts Wesentliches daran auszusetzen; doch unterblieb die Herausgabe, wohl weil andere Gebiete der Mathematik, namentlich die Elemente der analytischen Geometrie, den hochverehrten Herrn beschäftigten. Wenn der Unterzeichnete erst jetzt, nachdem so viele Jahre verflossen sind, sich entschlossen hat, die Vorträge herauszugeben, so liegt der Grund hauptsächlich darin, dass er lange Anstand genommen hat, selber die letzte Hand an die Druckfertigstellung zu legen. Als er aber einmal daran gegangen war, gaben ihm die hohen Vorzüge des Werkes den Muth, diese Arbeit zu Ende zu bringen, indem er hoffte, dass, was etwa an der Art der Abfassung den Beifall der Kenner nicht haben sollte, über den inneren Vorzügen der Vorlesungen verziehen werden würde. Als solche Vorzüge sei es gestattet, hier — und zwar nicht bloss nach der Meinung des Herausgebers, sondern auch nach dem Urtheile von namhaften Gelehrten, denen das Werk jetzt zur Prüfung vorgelegen hat — nur hervorzuheben, dass die Vorlesungen ein bestimmtes scharf abgegrenztes Gebiet in fasslicher und eleganter Darstellung behandeln, namentlich auch in ihnen die verschiedenen Diciphnen der Mathematik in geistreicher Weise zur Lösung der Probleme herangezogen sind, wie besonders die Geometrie an vielen Stellen die rechnende Lösung vorbereitet, oder ihr nachfolgend die gefundenen Resultate deutet.

Somit wird das Werk für Lernende eine nicht unwillkommene Gabe sein und Studirende der Mathematik an Universitäten und polytechnischen Schulen interessiren.

Reichenbach i. Schl.

Dr. Liersemann.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei der Uebernahme der Bearbeitung dieser zweiten Auflage ist es im Einverständniss mit meinem Herrn Vorgänger meine Absicht gewesen, dieses Buch als Joachimsthal's Eigenthum und als Elementarbuch bestehen zu lassen.

Diejenigen Ergänzungen, die ich bei einzelnen Abschnitten für wünschenswerth hielt, habe ich deshalb nur dann in die vorhandenen Paragraphen aufgenommen, wenn sie entweder rein redactioneller Natur oder von geringerer Ausdehnung waren. Andere längere Zusätze sind als Zusätze zur zweiten Auflage bezeichnet, und so eingerichtet, dass sie zum Verständniss des vorher vorhandenen Theils nicht unbedingt nothwendig sind, also, wenn man will, etwa beim ersten Studium auch weggelassen werden können. Der Anhang, für den ich natürlich allein verantwortlich bin, soll Gelegenheit geben, einen Theil des im Buche Gegebenen entweder zu vervollständigen oder von andern Standpunkten aus aufzufassen. Derselbe zerfällt in vier Theile. Der erste giebt nach einigen vorbereitenden Betrachtungen einen direkten Beweis des Jakobischen Satzes, der zweite eine Erweiterung der Theorie der Curven doppelter Krümmung auf Grund eines neuen Coordinatensystems, der dritte ist einer neuen Definition der Gauss'schen Totalkrümmung und der daraus folgenden Betrachtungen gewidmet. Die Entwicklung der Formeln für verschiedene Elementargrößen der Flächentheorie macht den Schluss. Wenn ich so hoffe, den Nutzen des bereits rühmlichst bekannten und verbreiteten Buches einigermassen vermehrt zu haben, so bin ich wenigstens sicher, dass dasselbe in keiner Weise beschädigt ist.

Berlin, im Januar 1881.

L. Natani.

I n h a l t.

Einleitung.

	§	Seite
Erklärung der Curven doppelter Krümmung und der Curven im Raume	1.	1
Analytischer Ausdruck der Curve im Raume, 1) als Durchschnitt zweier cylindrischer Oberflächen, 2) durch ihre Projektionen auf zwei Coordinatenebenen	2.	2
3) Die drei Coordinaten als Functionen einer vierten Variablen (Beispiele)	3.	3
Analytischer Ausdruck der Fläche (Beispiele)	4.	5

Erster Abschnitt. Curven im Raume.

I. Tangente und Normalebene.		
Tangente an die Curve im Raume erklärt und Aufstellung der Gleichung	5.	7
Neigung der Tangente zu den Coordinatenaxen; Differential des Bogens	6.	8
Normalebene der Curve im Raume	7.	10
II. Schmiegungebene.		
Schmiegungebene erklärt und Aufstellung der Gleichung	8.	10
Aufgabe: Die Constanten in der Gleichung einer Fläche so zu bestimmen, dass die Fläche durch eben so viele gegebene Punkte geht	9.	11
Ableitung der Schmiegungebene aus dieser Aufgabe	10.	13
III. Osculationskreis, erste Krümmung.		
Osculationskreis erklärt; Gleichungen für die Coordinaten seines Mittelpunktes und seinen Radius, wenn eine beliebige unabhängige Veränderliche angenommen wird	11.	13
Dieselben Formeln, wenn der Bogen als unabhängige Veränderliche angenommen wird; die Winkel des Krümmungsradius mit den Axen	12.	15
Excurs (Zerlegung der Kraft nach Tangente und Normale der Bahncurve)	13.	17
Erste geometrische Ableitung des Werthes des Krümmungsradius (Contingenzwinkel; Winkel zweier auf einander folgender Linien eines Systems)	14.	18
Zweite geometrische Ableitung für die Grösse des Krümmungsradius und der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes	15.	19
Daraus Richtung des Krümmungsradius	16.	20
Dritte geometrische Ableitung	17.	21
Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Normalebene der Curve; Erklärung der Krümmungsaxe; ihre Gleichungen	18.	22
Bei ebenen Curven ist die Tangente an die Curve der Krümmungsmittelpunkte (Evolute) Normale an die gegebene Curve; bei Curven doppelter Krümmung nicht	19.	23
Aedeutung des analytischen Beweises hierfür	20.	24

	§	Seite
IV. Zweite Krümmung.		
Erklärung der zweiten Krümmung; ihr Werth	21.	25
Bestimmung der Curven, deren erste oder zweite Krümmung Null ist	22.	27
V. Schmiegunskugel.		
Erklärung der Schmiegunskugel; Bestimmung des Radius und der Coordinaten ihres Mittelpunktes	23.	28
Zweiter Abschnitt. Flächen und Curven auf den Flächen.		
I. Analytischer Ausdruck der Fläche; drei verschiedene Arten, Beispiel	24.	29
Geometrische Bedeutung der dritten Art, Beispiel	25.	31
Analoges bei den ebenen Coordinaten	26.	32
Curve auf einer Fläche, deren Gleichung in der dritten Art gegeben ist	27.	32
A. Die Gleichung der Fläche sei gegeben in der ersten oder zweiten Art.		
II. Untersuchung der Flächen mittelst schneidender Ebenen.		
Formeln für die Verlegung rechtwinkliger Coordinaten im Raum	28.	33
Allgemeinere Formeln zu diesem Zweck	29.	35
Ueber die Determinante Δ bei dieser Transformation	30.	36
Beispiel: Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades	31.	39
Zwei Zusätze hierzu	32.	42
III. Tangentialebene und Normale.		
Entstehung, Gleichung und Definition der Tangentialebene	33.	44
Anmerkungen	34.	46
Folgerungen und andere Form der Gleichung der Tangentialebene; Gleichung der Normale	35.	46
Anderer Gestalt der Gleichung der Tangentialebene bei algebraischen Flächen	36.	48
In welchem Falle schneidet die Tangentialebene eine Fläche zweiten Grades?	37.	51
Lema, behufs der:	38.	53
Untersuchung: Wann schneidet die Tangentialebene ihre Fläche? Dieselbe Untersuchung für die Form der Gleichung der Fläche	39.	54
$F(x, y, z) = 0$	40.	57
IV. Osculation der Flächen.		
Einleitender Satz	41.	59
Osculation der Flächen ersten und zweiten Grades	42.	61
Lehrsatz über die Schnittcurven zweier einander osculirenden Flächen	43.	62
Einleitende Bemerkungen über die Krümmungen in den verschiedenen Schnittcurven einer Fläche; Normalschnitt	44.	64
Der Meusnier'sche Satz	45.	65
Anderer Beweis des Meusnier'schen Satzes	45a.	67
Der Euler'sche Satz	46.	68
Theorie der Indicatric und damit zusammenhängende Sätze	46a.	71
Ableitung der Krümmungsradien aus der unmittelbar gegebenen Gleichung der Fläche	47.	76
Ausdruck für den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser. Bemerkungen zu der resultirenden Gleichung	48.	78
Anderer Formen dieser Gleichung und Anwendung auf die Flächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte	49.	81
	50.	82

	§	Seite
Anwendung auf die Revolutionsflächen	51.	85
Aufsuchung der Nabelpunkte einer Fläche	52.	88
B. Die Gleichung der Fläche sei in der dritten Art gegeben.		
V. Einleitendes.		
Recapitulation der §§ 24—27	53.	90
Tangente an die Curven U und V ; Winkel dieser Curven; er ist = R , wenn $F = 0$	54.	92
Oberflächenelement	55.	93
Bogenelement einer Curve C auf der Fläche; Winkel der Curve mit den Curven U und V ; Winkel ihrer Tangente mit den Axen	56.	94
Beispiel: Loxodrome	57.	95
VI. Krümmung der Flächen.		
Krümmungsradius irgend einer Curve auf der Fläche	58.	97
Normale der Fläche; Krümmungsradius des Normalschnittes, Nabelpunkte	59.	98
Grösster und kleinster Krümmungshalbmesser	60.	99
Ihr Product ausgedrückt durch E, F, G und ihre Differential- quotienten nach u und v	61.	101
Satz von Gauss über Biegung von Flächen	62.	103
Krümmung der Flächen	63.	105
Krümmungscurven erklärt; Gleichung	64.	108
Genauere Untersuchung der Krümmungslinien; Sätze über die- selben; Evolutenfläche	64a.	110
Beispiel: Schraubenfläche, Paraboloid	65.	117
Gleichung der Krümmungscurven für die ersten Arten der Dar- stellung der Flächen	66.	119
Ebene Krümmungscurven	67.	121
VII. Theorie der geradlinigen Flächen.		
Erklärung dieser Flächen; ihre Gleichung	68.	122
Gleichung der Tangentialebene; die Normalen entlang einer Ge- neratrix	69.	125
Abwickelbare Flächen	70.	127
Analytische Betrachtungen über die abwickelbaren Flächen	71.	129
Fortsetzung	72.	131
Partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen	73.	134
Die conjugirten Tangenten der Krümmungslinien	74.	135
Evolute der Krümmungslinien	75.	137
Das Evolutenproblem für doppelt gekrümmte Curven	76.	141
Analytische Ausführung des Vorhergehenden	76a.	144
VIII. Ueber confocale Flächen und die Krümmungscurven der Flächen zweiten Grades.		
Ueber confocale Flächen zweiten Grades	77.	148
Andrer Beweis dafür, dass die Wurzeln der cubischen Gleichung reell sind	78.	150
Dupinscher Satz für Flächen zweiten Grades	79.	152
Der betrachtete Punkt liegt auf einer Fläche zweiten Grades; Elliptische Coordinaten	80.	152
Anwendung der elliptischen Coordinaten	81.	154
Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung	82.	155
Hilfssatz für den Dupinschen Satz	83.	157
Analytischer Beweis des Dupinschen Satzes	84.	160
Andrer Beweis des Satzes vom Krümmungsmaasse	85.	160

	§	Seite
IX. Theorie der kürzesten Linien auf den Flächen.		
Lehrsatz über die kürzesten Linien	86.	161
Gleichung der kürzesten Linien	87.	163
Geometrischer Beweis von § 86	88.	164
Beweis desselben Satzes durch Variationsrechnung	89.	165
Excurs über Mechanik	90.	170
Die kürzesten Linien auf den Rotationsflächen	91.	171
Auf dem dreiaxigen Ellipsoid	92.	173
Lehrsatz über die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid	93.	177
Satz über die Ellipse und Hyperbel	94.	178
Satz über die Flächen von Gauss, nebst Anmerkung	95.	180
Satz über das Ellipsoid, analog § 94	96.	183
Neues Coordinatensystem von Gauss	97.	184
Gleichung der kürzesten Linien in diesem System	98.	186
Curvatura integra	99.	187
X. Die partiellen Differentialgleichungen der Flächen.		
Cylinder, Kegelfläche, Revolutionsfläche	100.	190
Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	101.	193
Anderer Beweis	101a.	197
Integration der partiellen Differentialgleichungen einiger Flächen	102.	199

Anhang.

Ueber den Inhalt eines Polygons, welches von beliebigen Curven auf einer Kugelfläche gebildet wird	1.	202
Ueber sphärische Dreiecke, worin ein Winkel und seine Gegen- seite unendlich klein sind	2.	206
Beweis des Jakobischen Satzes	3.	207
Ueber ein neues Coordinatensystem; Definition der neuen Coor- dinaten	4.	210
Anwendung auf Curven auf einer abwickelbaren Fläche	5.	212
Kürzeste Linien auf abwickelbaren Flächen	6.	214
Trajectorien der Tangentenschaar einer doppelt gekrümmten Curve	7.	218
Evoluten der doppelt gekrümmten Curven	8.	222
Evolutenfläche	9.	224
Abwickelnde Fläche	10.	225
Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung. Hülfsätze aus der sphärischen Trigonometrie	11.	227
Andre Definition der Flächenkrümmung	12.	232
Neuer Beweis und Erweiterung des Gaussischen Satzes über die Totalkrümmung	13.	233
Erweiterung des Begriffes der Flächenkrümmung	14.	235
Entwicklung der Formeln für die Elementargrößen in der Flächentheorie	15.	238